מבוא מתמטי למהנדסים

פרק 2 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

תוכן העניינים

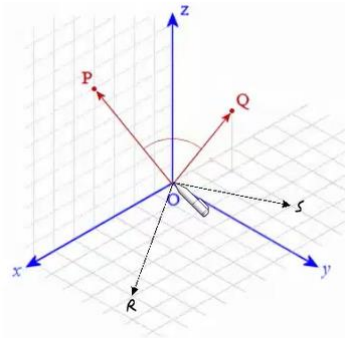
1. וקטורים 1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 8
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 10
4. פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי 11
5. גרדינט, דיברגנץ ורוטור 20

וקטורים

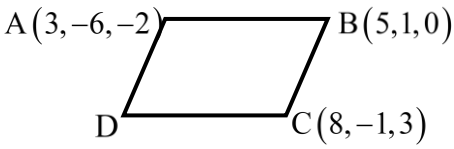
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}$, **u**.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

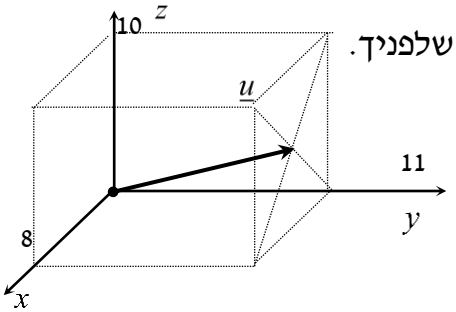
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



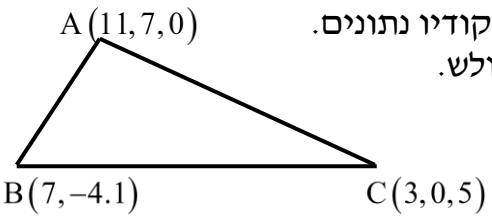
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

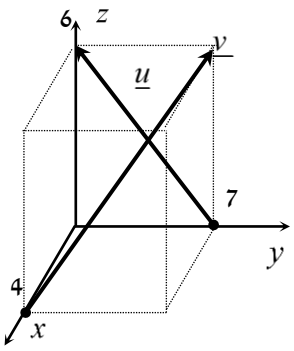


כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.



6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

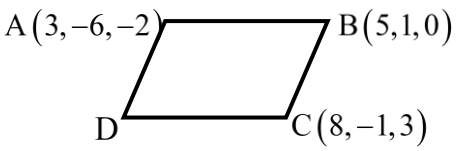
7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמקו.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו-$(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) הוכיחו:

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}$ *

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3)$, $B(4,-1,2)$, $C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\qquad L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$,
כאשר $r(t)=\left(\cos\pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$,
כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה)
הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.
בסעיפים א-ג, חשבו:

א. $\lim\limits_{t\to1} r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב-$t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשבו: $\frac{d\,|r'|}{dt}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|$, $\frac{dr}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב- $t=0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב- $t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב- $t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשבו את משיק היחידה (**T**), נורמל היחידה (**N**) והבינורמל (**B**) של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל- $t=2$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,
הוכיחו כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשבו את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.
ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצאו את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי)
ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=\left(2t^2-5t+3,t-5,t^2-3\right)$.
עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t)=\left(t^2-5t\right)\mathbf{i}+(2t+1)\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.

ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}$.
הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18) הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19) חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r\left(t\right)=\left(t^2,0,t\right)$.

20) וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t)=\left(2,-1,-10t\right)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t=1$.

21) וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t)=\left(8\cos 4t,8\sin 4t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t=\frac{\pi}{4}$.

22) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.

א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C.

ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a,b) ורדיוס R.

23) נתון העקום $r(t)=(4\cos t,3\sin t)$ כאשר $0\le t\le 2\pi$.
באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

24) נתון העקום $r(\theta)=\left(\cos^3\theta,\sin^3\theta\right)$.
הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

25) נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y=f(x)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(x)=\dfrac{|y''(x)|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

26) נתון העקום $y=\dfrac{1}{x}$.

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.

ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי.
מהו רדיוס זה?

ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

27) מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4+y^4=2$ בנקודה $(1,1)$.
הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת.
מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

28) נתונה הפרבולה $y^2=8x$.

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\dfrac{125}{16}$.

ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.
מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

30) נתון העקום $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$.
בנקודה בה $\theta=\pi/6$:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.

ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.

ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t)=\left(x(t),y(t)\right)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(t)=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{3/2}}$.

32) ענו על הסעיפים הבאים:
א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ $(a,b>0)$ ב- $t=0$ וב- $t=\pi/2$.
ב. הציבו $a=3,\ b=2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.
במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r=f(\theta)$ היא
$k(\theta)=\dfrac{\left|r^2+2(r')^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

34) חשבו את העקמומיות של $r=2\sin\theta$ עבור $\theta=\pi/6$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r=1+\cos\theta$ עבור $\theta=\pi/2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.
במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $0<t\le 4$ א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$
$r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$
$r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$
$r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$
$r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$
$r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן. ה. כן.

4) א. $\frac{d|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6}$, $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right)$,
ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right)$, $N(t)=(-\sin t,-\cos t,0)$, $B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

8) שאלת הוכחה.

9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

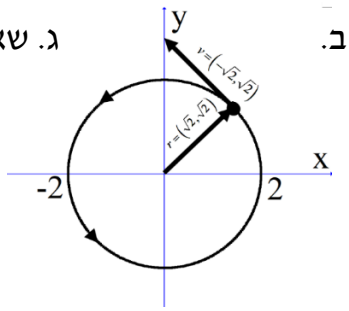
10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. 12 ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right)$, $|v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2}$, $a(t)=\left(0,0,-g\right)$, $|a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$
$|v(t)|=2$

ב.



ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

16) $v_{\min}=v(1)=\sqrt{6}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

17) א. $\left(-\frac{19}{16},\frac{3}{2},\frac{3}{16}\right)$ ב. $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}_{rad}$

18) שאלת הוכחה.

19) $\rho = \frac{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2}$, $\kappa = \frac{2}{\left(4t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$

20) $\rho = \frac{21\sqrt{21}}{2}$

21) $\kappa = \frac{2}{13}$, $\rho = 6.5$

22) א. $\rho = R,\ \kappa = 1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל- $\rho = R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa = \frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t = 0,\pi,2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות **מינימלית** עבור $t = \pi/2, 3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa = \frac{3}{16}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) א. $\rho(x) = \frac{\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{2}}}{2x^2|x|}$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה $(1,1)$ ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

ג. $(x-2)^2+(y-2)^2 = 2$

27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2+(y-2/3)^2 = 2/9$.

28) א. $y = \pm 3,\ x = \frac{9}{8}$ ב. $(x-59/8)^2+(y+27/16)^2 = (125/16)^2$

29) $\kappa = \frac{1}{R}$, $\rho = R$

30) א. $\rho = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ב. $x^2+\left(y+1\right)^2 = \frac{27}{16}$ ג. שאלת הוכחה.

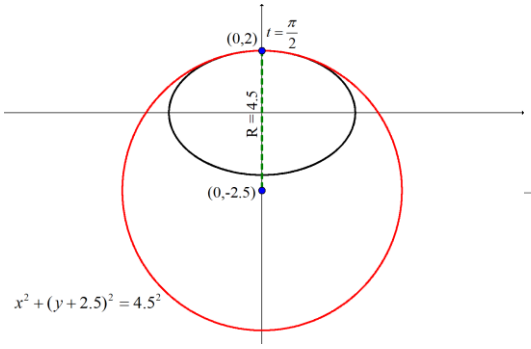
31) שאלת הוכחה.

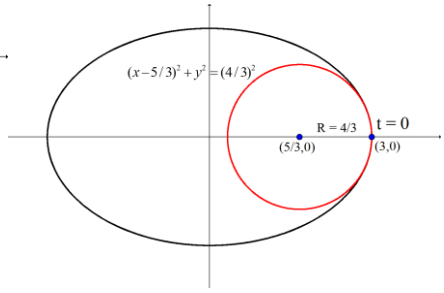
כתב ופתר – גיא סלומון ©

32) א.

$$\kappa(0)=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2} \qquad \kappa(\pi/2)=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}$$

$$\rho(0)=\frac{b^2}{a} \qquad \rho(\pi/2)=\frac{a^2}{b}$$



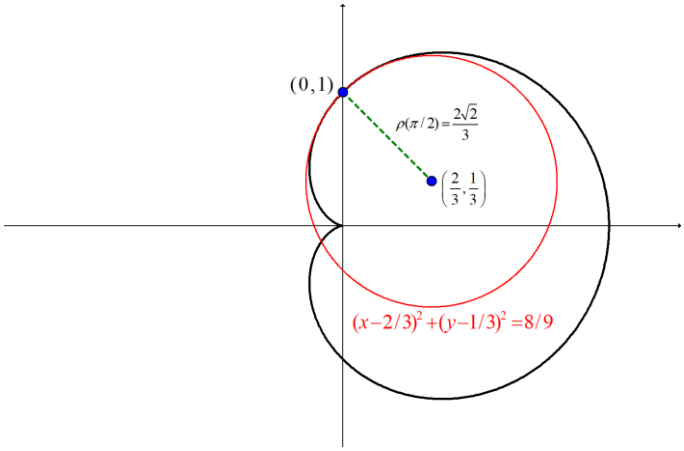


ב.

33) שאלת הוכחה.

34) $\kappa=\rho=1$

35) ראו שרטוט:



כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים.
הוכיחו:
א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$
ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.
א. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.
ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$.
או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כללים
הוכיחו כי $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.
הוכיחו כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi = \varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad}\varphi = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)</u>

יהי $\mathbf{F} = f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\text{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{div}\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} \\ &\text{div}\mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h) \\ &\text{div}\mathbf{F} = f_x + g_y + h_z \end{aligned}}$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\text{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{curlF} = \nabla\times\mathbf{F} \\ &\mathbf{curlF} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h) \\ &\mathbf{curlF} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curlF} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ g & h \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & h \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ f & g \end{vmatrix} \\ &\mathbf{curlF} = (h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \end{aligned}}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot}\mathbf{F}$ במקום $\text{curl}\mathbf{F}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©