

מכינה במתמטיקה לחשמלאי מוסמך

פרק 14 - וקטורים גיאומטריים

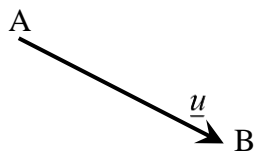
תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים.....1
2. וקטורים הפורשים מישור.....6

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:

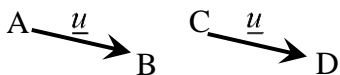


להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: \overline{AB} .

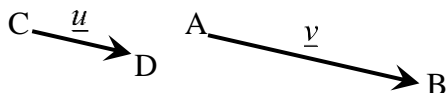
ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: \underline{u} (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).
מהאיור לעיל מתקיים: $\overline{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.
דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overline{AB} = \overline{CD}$.



- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים. ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר. ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".
דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:

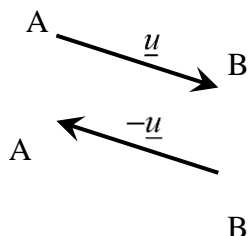


עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$, או: $\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{CD}$.

- אם זוג ווקטורים במרחב: $\overline{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overline{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$ מקבילים

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

אז מתקיים:

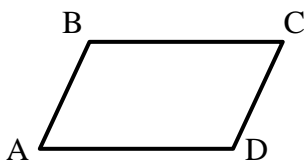


- ווקטור המסומן \overline{BA} הוא בעל גודל זהה לווקטור \overline{AB} וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overline{BA} = -\underline{u}$.

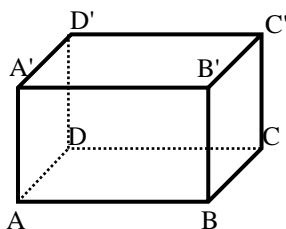
הערה:

שני ווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב- 180° .

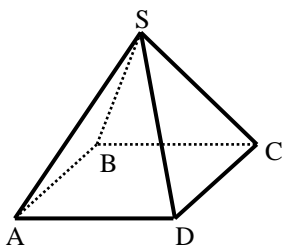
שאלות:



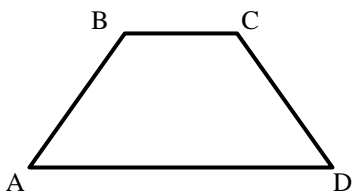
(1) במקבילית ABCD נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- \underline{u} או \underline{v} .



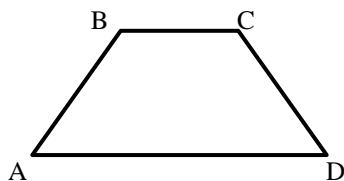
(2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .



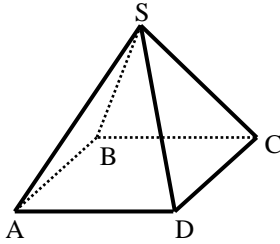
(3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AS} = \underline{w}$
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- \underline{u} , \underline{v} או \underline{w} .



(4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות \underline{u} או \underline{v} .



(5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$
א. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטורים \overline{AC} ו- \overline{DC} .
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטור \overline{BE} .
ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות \underline{u} ו- \underline{v} את הווקטור \overline{AF} .



6 בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע (6)

נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AS} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את

הווקטורים \overline{AC} ו- \overline{SC} .

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD .

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- \underline{w} את הווקטור \overline{BN} .

7 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 2:3$. נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$. (7)

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{AP} ו- \overline{PB} .

8 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 3:5$. נתון: $\overline{AP} = \underline{u}$. (8)

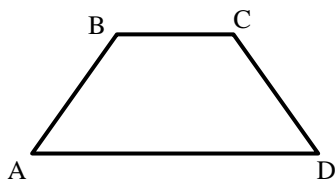
הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{PB} ו- \overline{AB} .

9 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB} = \alpha$. נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$. (9)

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{AP} ו- \overline{PB} .

10 הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB} = \alpha$. נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$. (10)

הבע באמצעות \underline{u} את הווקטורים \overline{AP} ו- \overline{PB} .



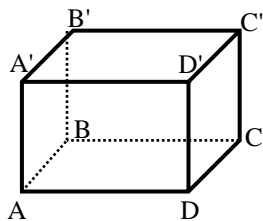
11 בטרפז $ABCD$ שבשרטוט (11)

נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת: $\frac{DF}{FC} = \beta$.

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} ו- β את הווקטור \overline{AF} .

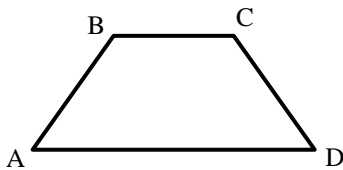


(12) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- α , β את הווקטור: \overline{PQ} .

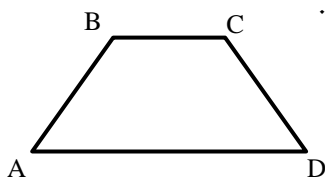


(13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$.

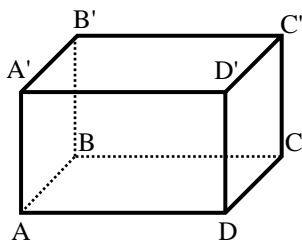


(14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$.



(15) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- α , β את הווקטור \overline{PQ} .

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overline{PQ} \parallel \overline{EC}$.

תשובות סופיות:

$$\underline{u} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overline{AA'} = \overline{DD'} = \overline{CC'} = \overline{BB'}, \underline{u} = \overline{DC} = \overline{D'C'} = \overline{A'B'} = \overline{AB}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = \overline{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overline{AB} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC}, \underline{w} = \overline{AS} \quad (3)$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overline{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overline{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overline{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overline{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overline{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overline{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overline{AP} = \alpha\underline{u}, \overline{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overline{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overline{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \text{א.} \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

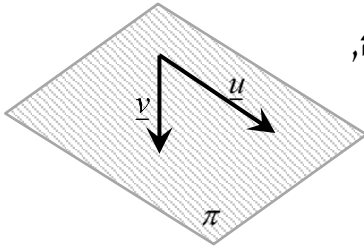
ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:



הווקטורים \underline{u} ו- \underline{v} בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π .

קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור \underline{w} המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ ו- \underline{w} נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overline{PQ} .

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור \overline{PQ} מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור \overline{PQ} מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C' ובה נתון:

$\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.

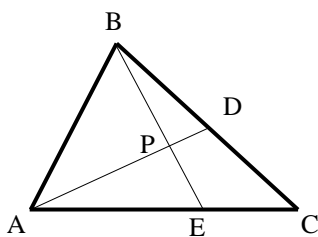
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות α , \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- β את הווקטור \overline{NM} .

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור \overline{NM} מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור \overline{NM} מקביל לפאה ABB'A'. הבע את α באמצעות β .



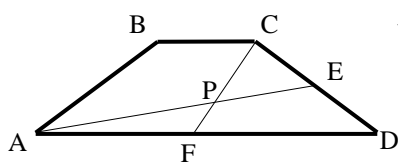
18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE} = 2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

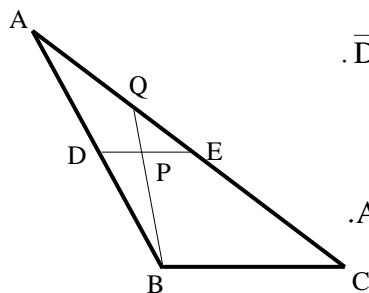
נגדיר: $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AC} = \underline{v}$, וכן: $\overline{AP} = t \cdot \overline{AD}$, $\overline{BP} = s \cdot \overline{BE}$.

א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , t ו- s את הווקטור \overline{AP} בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



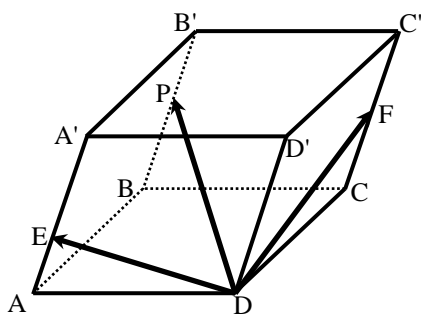
- (19)** בטרפז $ABCD$, $(AD \parallel BC)$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.
 הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
 והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD .
 הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו- CF .
 מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF .



- (20)** במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB
 והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
 הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
 חותך את הצלע AC בנקודה Q .

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC .

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{AQPE}}{S_{ADPB}}$.



- (21)** במקבילון $ABCD A'B'C'D'$
 נתון: $\overline{DA} = \underline{u}$, $\overline{DC} = \underline{v}$, $\overline{DD'} = \underline{w}$.
 הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC' ,
 הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'
 ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על
 המקצוע BB' ומקיימת: $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$.
 נתון: $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$.

- א. הבע באמצעות \underline{u} , \underline{v} , \underline{w} ו- k את הווקטור \overline{DP} .
 ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB' .
 ג. האם הנקודות D, E, F, P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א. (16)}$$

ג. לא. ב. $\alpha = 1$

$$\overline{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{א. (17)}$$

ג. $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$ ב. $\beta = 1$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \quad \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{א. (18)}$$

ב. $BP:PE = 3:2, AP:PD = 4:1$

$$AP:PE = 2:1, CP:PF = 2:1 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3} \quad \text{ב. (20)}$$

א. $AQ:QC = 1:2$

$$\overline{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad \text{א. (21)}$$

ב. $BP:PB = 1:5$ ג. כן.