

סדנת ריענון במתמטיקה למדעים והנדסה

פרק 30 - וקטורים גיאומטריים

תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים 1
2. וקטורים הפורשים מישור 6
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור 10

הגדרות וכללים יסודיים:

סיכום כללי:

הגדרה כללית:



להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$).

מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.

דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.

ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר.

ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".

דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:



עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$, או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.

- אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$ מקבילים

אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.



- ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל גודל זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$

וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

הערה:

שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ יקראו מקבילים אם מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ כאשר הגודל α יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום $\alpha \neq 0$. בפרט עבור $\alpha < 0$ כיוונם הפוך ב- 180° .

שאלות:



- (1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$
 מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



- (2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$
 מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



- (3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$
 מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



- (4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$
 מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



- (5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$
 א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.
 ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.
 ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



(6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את

הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.

(7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

(8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB = 3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

(9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

(10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.



(11) בטרפז ABCD שבשרטוט

נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

הנקודה F נמצאת על הצלע CD

ומקיימת: $\frac{DF}{FC} = \beta$.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



(12) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α , β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.



(13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AB}$.



(14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$.



(15) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α , β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$.

מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$.

תשובות סופיות:

$$\underline{u} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}, \underline{u} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \underline{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \underline{w} = \overrightarrow{AS} \quad (3)$$

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overrightarrow{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overrightarrow{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overrightarrow{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overrightarrow{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overrightarrow{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overrightarrow{AP} = \alpha \underline{u}, \overrightarrow{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overrightarrow{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

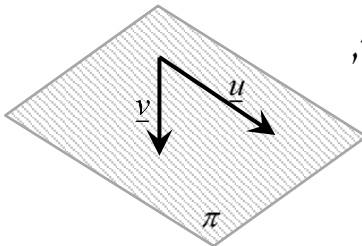
$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \text{א.} \quad \overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

ווקטורים הפורשים מישור:

סיכום כללי:

ווקטורים הפורשים מישור:



כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:

הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור π .

קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$ כאשר: α, β מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{u}, \underline{v}$ ו- $\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

שאלות:



16) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α , β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה $ADD'A'$?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$

ובה נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה M נמצאת על המקצוע $A'C'$ ומקיימת: $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

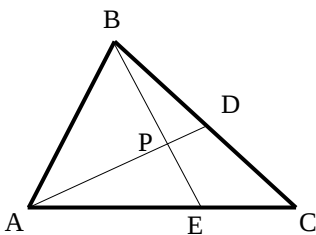
והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α , β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ACC'A'$?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ABB'A'$.

הבע את α באמצעות β .



18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC

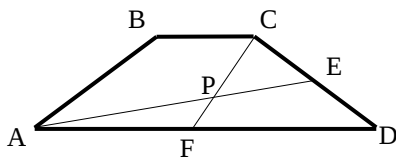
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE} = 2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, וכן: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$.

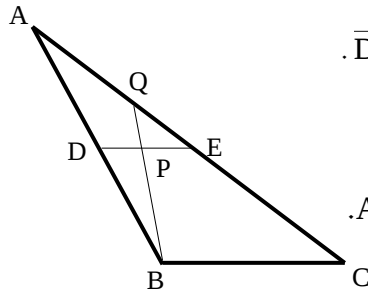
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



(19) בטרפז $ABCD$, $(AD \parallel BC)$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD
והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD .
הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו- CF .
מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF .

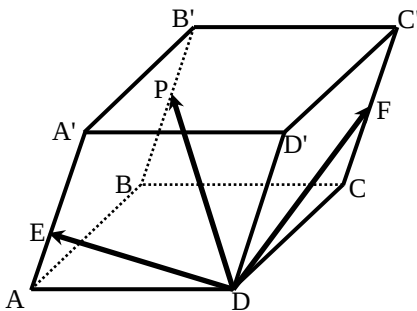


(20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB

והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.
הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP
חותך את הצלע AC בנקודה Q .

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC .

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{AQPE}}{S_{ADPB}}$.



(21) במקבילון $ABCD A'B'C'D'$

נתון: $\overline{DA} = \underline{u}$, $\overline{DC} = \underline{v}$, $\overline{DD'} = \underline{w}$.

הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC' ,

הנקודה E נמצאת על המקצוע AA'

ומקיימת: $A'E = 2AE$ והנקודה P נמצאת על

המקצוע BB' ומקיימת: $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$.

נתון: $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את הווקטור $\overline{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB' .

ג. האם הנקודות D , E , F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned}
 & \text{א. } \overrightarrow{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{ב. } \alpha=1 \quad \text{ג. לא.} \quad (16) \\
 & \text{א. } \overrightarrow{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{ב. } \beta=1 \quad \text{ג. } \alpha = \frac{\beta}{1-\beta} \quad (17) \\
 & \text{א. } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \overrightarrow{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{ב. } BP:PE=3:2, AP:PD=4:1 \quad (18) \\
 & AP:PE=2:1, CP:PF=2:1 \quad (19) \\
 & \text{א. } AQ:QC=1:2 \quad \text{ב. } \frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3} \quad (20) \\
 & \text{א. } \overrightarrow{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad \text{ב. } BP:PB=1:5 \quad \text{ג. כן.} \quad (21)
 \end{aligned}$$

מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

גודל של ווקטור נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$, או: $|\underline{u}|^2 = u^2$

הערה:

המכפלה הסקלרית $\underline{u} \cdot \underline{v}$ בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

שאלות:

22 חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

- | | |
|--|---|
| א. $\alpha = 60^\circ$, $ \underline{v} = 2$, $ \underline{u} = 3$ | ב. $\alpha = 120^\circ$, $ \underline{v} = 5$, $ \underline{u} = 4$ |
| ג. $\alpha = 30^\circ$, $ \underline{v} = 6$, $ \underline{u} = 2$ | ד. $\alpha = 180^\circ$, $ \underline{v} = 3$, $ \underline{u} = 8$ |
| ה. $\alpha = 0^\circ$, $ \underline{v} = 5$, $ \underline{u} = 3$ | ו. $\alpha = 90^\circ$, $ \underline{v} = 4$, $ \underline{u} = 7$ |

23 חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

- | | |
|--|---|
| א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$, $ \underline{v} = 4$, $ \underline{u} = 3$ | ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$, $ \underline{v} = 2$, $ \underline{u} = 4$ |
| ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $ \underline{v} = 5$, $ \underline{u} = 9$ | ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$, $ \underline{v} = 6$, $ \underline{u} = 2$ |

- (24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120° .
 חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

- (25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
 חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$.

- (26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120° .
 חשב את גודל הזווית $\angle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$, $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.



- (27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$).
 הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
 הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
 נתון: $AC = 12$, $AB = 8$, $\frac{AP}{PD} = 3$.
 חשב את גודל הזווית $\angle DPC$.



- (28) נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
 הנקודה M היא אמצע המקצוע $A'C'$ והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN = 2CN$.
 נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.
 חשב את גודל הזווית $\angle MAN$.



- (29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.
 נתון: $AB = AD = \frac{1}{2} AS = k$.
 נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.
 הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.
 חשב את גודל הזווית $\angle PAQ$.

(30) בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{AD} = \overline{AA'}$, $\overline{AB} = \underline{u}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AA'} = \underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD' .

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $|\overline{AP}| = \frac{5}{6} |\overline{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos \angle PAQ$

והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\angle PAQ$ מקיימת: $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

(31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

(32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$

(33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$

(34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים: $\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

(35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overline{AS} \perp \overline{BC}$ ו- $\overline{BS} \perp \overline{AC}$

הוכח: $\overline{CS} \perp \overline{AB}$

(36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

(37) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
 הוכח: $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$.
- ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC.
 הוכח: $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$.
- ג. נתון בנוסף כי $\vec{AS}$ ו- $\vec{AP}$ מאונכים ל- $\vec{BC}$.
 הוכח כי $AB = AC$. (הדרכה: סמן $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$).



- (38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD
 כך שהמשולשים BPC ו-APD הם משולשים
 ישרי זווית וש"ש ($AP = PD$, $BP = PC$).
 הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\vec{PE} \perp \vec{AB}$.
 (הדרכה: סמן $\vec{PB} = \underline{a}$, $\vec{PC} = \underline{b}$, $\vec{PA} = \underline{c}$, $\vec{PD} = \underline{d}$).

- (39) בטראדר SABC נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.
 הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$.
 הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\vec{SQ} = \beta(\vec{SB} + \vec{SC})$.
- א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\vec{PQ}$ מקביל למישור ABC.
- ב. נתון: $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$. הוכח: $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$. הוכח: $AB = AC$.

(40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

- (22) א. 3 ב. -10 ג. $6\sqrt{3}$ ד. -24 ה. 15 ו. 0.
- (23) א. 60° ב. 150° ג. 90° ד. 0°
- (24) $|\overline{PQ}| = 18.248$
- (25) $|\overline{MN}| = \sqrt{29}$
- (26) 31.87°
- (27) 55.49°
- (28) 70.623°
- (29) 24.095°
- (30) א. $\alpha = \frac{3}{4}$ ב. $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$ ג. $\alpha = \frac{1}{2}$
- (31) שאלת הוכחה.
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) שאלת הוכחה.
- (36) שאלת הוכחה.
- (37) שאלת הוכחה.
- (38) שאלת הוכחה.
- (39) א. $\alpha + 2\beta = 1$ ב. שאלת הוכחה.
- (40) שאלת הוכחה.