

# מתמטיקה להנדסאים

פרק 12 - וקטורים גיאומטריים

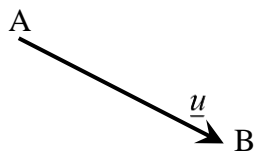
תוכן העניינים

1. הגדרות וכללים יסודיים ..... 1
2. וקטורים הפורשים מישור ..... 6
3. מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור ..... 10

## הגדרות וכללים יסודיים:

### סיכום כללי:

#### הגדרה כללית:

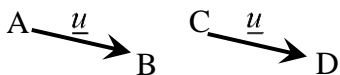


להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי: ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא:  $\overline{AB}$ .

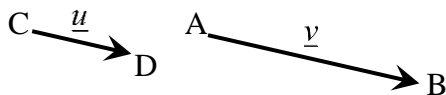
ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא:  $\underline{u}$  (אותיות מקובלות לסימון הן:  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ).  
מהאיור לעיל מתקיים:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

#### קשרים בין ווקטורים:

- ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.  
דוגמא לווקטורים שווים: מתקיים:  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .



- ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים. ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע"י כפל בסקלר. ווקטורים מקבילים נקראים גם "ווקטורים תלויים ליניארית".  
דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:

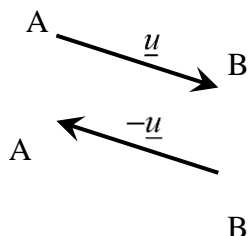


עבור  $\alpha > 1$  מתקיים:  $\underline{v} = \alpha \underline{u}$ , או:  $\overline{AB} = \alpha \cdot \overline{CD}$ .

- אם זוג ווקטורים במרחב:  $\overline{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$  ו-  $\overline{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$  מקבילים

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$$

אז מתקיים:

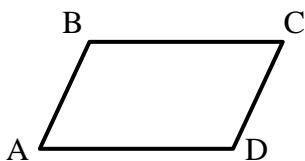


- ווקטור המסומן  $\overline{BA}$  הוא בעל גודל זהה לווקטור  $\overline{AB}$  וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים:  $\overline{BA} = -\underline{u}$ .

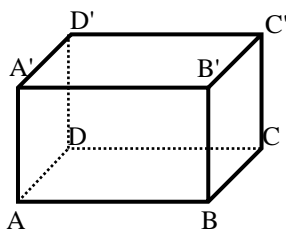
#### הערה:

שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו-  $\underline{v}$  יקראו מקבילים אם מתקיים:  $\underline{v} = \alpha \underline{u}$  כאשר הגודל  $\alpha$  יכול לקבל כל ערך מספרי בתחום  $\alpha \neq 0$ . בפרט עבור  $\alpha < 0$  כיוונם הפוך ב-  $180^\circ$ .

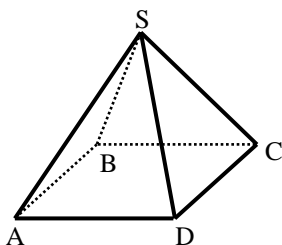
**שאלות:**



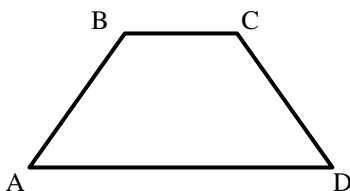
(1) במקבילית ABCD נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$   
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



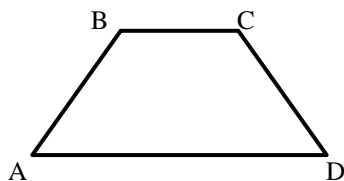
(2) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$   
מצא את כל הווקטורים בתיבה ששווים ל- $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .



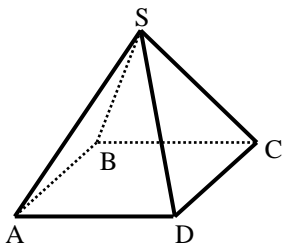
(3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$   
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה השווים ל- $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  או  $\underline{w}$ .



(4) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$   
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן להביע באמצעות  $\underline{u}$  או  $\underline{v}$ .



(5) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$   
א. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  את הווקטורים  $\overline{AC}$  ו- $\overline{DC}$ .  
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  את הווקטור  $\overline{BE}$ .  
ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD. הבע באמצעות  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  את הווקטור  $\overline{AF}$ .



6 בפירמידה  $SABCD$  שבסיסה ריבוע

נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את

הווקטורים  $\overline{AC}$  ו- $\overline{SC}$ .

ב. הנקודה  $N$  היא אמצע המקצוע  $SD$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\underline{w}$  את הווקטור  $\overline{BN}$ .

7 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $AP:PB = 2:3$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .

8 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $AP:PB = 3:5$ . נתון:  $\overline{AP} = \underline{u}$ .

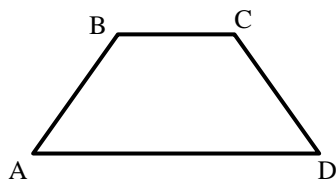
הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{PB}$  ו- $\overline{AB}$ .

9 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $\frac{AP}{AB} = \alpha$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .

10 הנקודה  $P$  נמצאת על הקטע  $AB$  כך ש:  $\frac{AP}{PB} = \alpha$ . נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$  את הווקטורים  $\overline{AP}$  ו- $\overline{PB}$ .



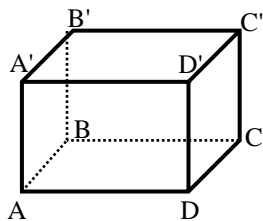
11 בטרפז  $ABCD$  שבשרטוט

נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$ .

הנקודה  $F$  נמצאת על הצלע  $CD$

ומקיימת:  $\frac{DF}{FC} = \beta$ .

הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{AF}$ .

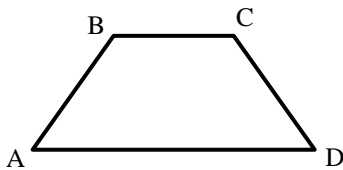


**(12)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  את הווקטור:  $\overline{PQ}$ .

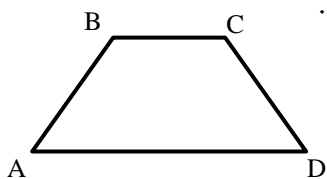


**(13)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים  $\overline{FE} \parallel \overline{AB}$ .

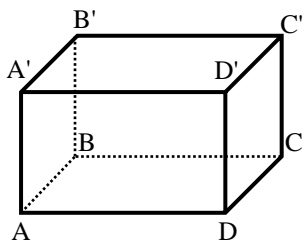


**(14)** בטרפז ABCD שבשרטוט נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $AD = 3BC$

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת:  $\frac{AF}{FD} = \alpha$

מצא את ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $\overline{FE} \parallel \overline{AC}$ .



**(15)** בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$

הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע  $CC'$  ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  את הווקטור  $\overline{PQ}$ .

ב. האם קיימים ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורם  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה  $ABB'A'$ .

מצא את ערכי  $\alpha$  ו- $\beta$  אם נתון כי  $\overline{PQ} \parallel \overline{EC}$ .

**תשובות סופיות:**

$$\underline{u} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{BC} \quad (1)$$

$$\underline{w} = \overline{AA'} = \overline{DD'} = \overline{CC'} = \overline{BB'}, \underline{u} = \overline{DC} = \overline{D'C'} = \overline{A'B'} = \overline{AB}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{A'D'} = \overline{B'C'} \quad (2)$$

$$\underline{u} = \overline{AB} = \overline{DC}, \underline{v} = \overline{AD} = \overline{BC}, \underline{w} = \overline{AS} \quad (3)$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{3}\underline{v} \quad (4)$$

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\underline{u} + \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{ג.} \quad \overline{BE} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \frac{1}{3}\underline{v}, \overline{DC} = \underline{u} - \frac{2}{3}\underline{v} \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\overline{BN} = -\underline{u} + \frac{1}{2}\underline{v} + \frac{1}{2}\underline{w} \quad \text{ב.} \quad \overline{AC} = \underline{u} + \underline{v}, \overline{SC} = \underline{u} + \underline{v} - \underline{w} \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\overline{AP} = \frac{2}{5}\underline{u}, \overline{BP} = \frac{3}{5}\underline{u} \quad (7)$$

$$\overline{AB} = \frac{8}{3}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{5}{3}\underline{u} \quad (8)$$

$$\overline{AP} = \alpha\underline{u}, \overline{PB} = (1-\alpha)\underline{u} \quad (9)$$

$$\overline{AP} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}, \overline{PB} = \frac{1}{1+\alpha}\underline{u} \quad (10)$$

$$\overline{AF} = \frac{\beta}{1+\beta}\underline{u} + \frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v} \quad (11)$$

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad (12)$$

$$\alpha = 2 \quad (13)$$

$$\alpha = 1 \quad (14)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1 \quad \text{ג.} \quad \text{א.} \quad \overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א.} \quad (15)$$

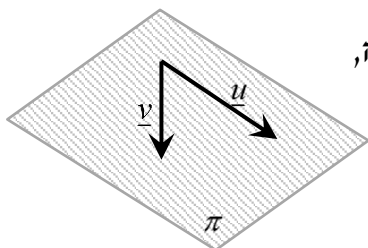
## ווקטורים הפורשים מישור:

### סיכום כללי:

#### ווקטורים הפורשים מישור:

כל שני ווקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.

דוגמא:



הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  בעלי כוונים שונים ולכן פורשים את המישור  $\pi$ .

#### קומבינציה ליניארית של ווקטורים:

- כל ווקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור.
- כל ווקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני ווקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע ווקטור שקומבינציה ליניארית של שני ווקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים תלויים ליניארית (ניתן לבטא כל ווקטור באמצעות האחרים).

דוגמא:

עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל ווקטור  $\underline{w}$  המוכל, או מקביל למישור  $\pi$  באופן הבא:  $\underline{w} = \alpha \cdot \underline{u} + \beta \cdot \underline{v}$  כאשר:  $\alpha, \beta$  מספרים ממשיים כלשהם. במקרה זה שלושת הווקטורים  $\underline{u}, \underline{v}$  ו- $\underline{w}$  נקראים תלויים ליניארית.

**שאלות:**



16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת:  $\frac{CQ}{QC'} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{PQ}$ .

ב. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הווקטור  $\overline{PQ}$  מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overline{PQ}$  מקביל לבסיס ABCD?



17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C' ובה נתון:

$\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .

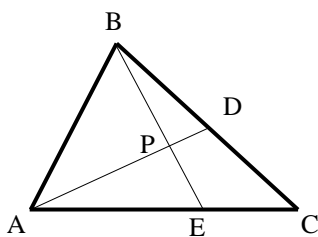
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת:  $\frac{AM}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $\frac{BN}{BC} = \beta$

א. הבע באמצעות  $\alpha$ ,  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $\beta$  את הווקטור  $\overline{NM}$ .

ב. מהו ערכו של  $\beta$  שבעבורו הווקטור  $\overline{NM}$  מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור  $\overline{NM}$  מקביל לפאה ABB'A'. הבע את  $\alpha$  באמצעות  $\beta$ .



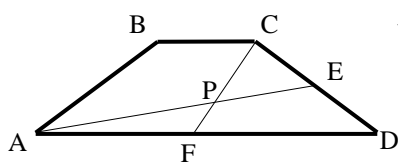
18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים:  $\frac{AE}{CE} = 2$ .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

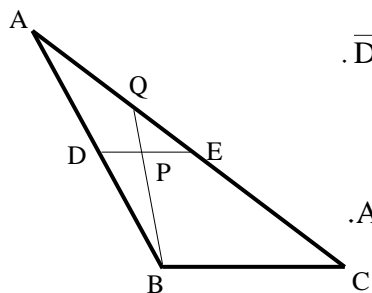
נגדיר:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ , וכן:  $\overline{AP} = t \cdot \overline{AD}$ ,  $\overline{BP} = s \cdot \overline{BE}$ .

א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $t$  ו- $s$  את הווקטור  $\overline{AP}$  בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.

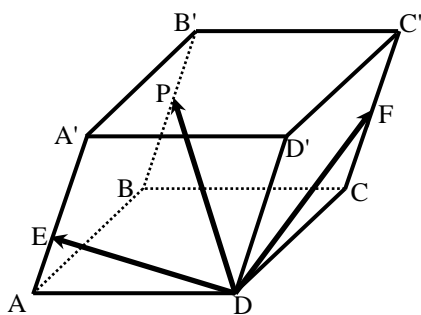


- (19)** בטרפז  $ABCD$ ,  $(AD \parallel BC)$ , שבשרטוט נתון:  $AD = 3BC$ .  
 הנקודה  $E$  נמצאת באמצע הצלע  $CD$   
 והנקודה  $F$  נמצאת באמצע הצלע  $AD$ .  
 הנקודה  $P$  היא מפגש הקטעים  $AE$  ו- $CF$ .  
 מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את הקטע  $AE$  ואת הקטע  $CF$ .



- (20)** במשולש  $ABC$  הנקודה  $D$  היא אמצע הצלע  $AB$   
 והנקודה  $E$  נמצאת על הצלע  $AC$  כך שמתקיים:  $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ .  
 הנקודה  $P$  היא אמצע הקטע  $DE$  והמשך הקטע  $BP$   
 חותך את הצלע  $AC$  בנקודה  $Q$ .

- א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $Q$  את הצלע  $AC$ .  
 ב. חשב את היחס:  $\frac{S_{AQPE}}{S_{ADPB}}$ .



- (21)** במקבילון  $ABCD A'B'C'D'$   
 נתון:  $\overline{DA} = \underline{u}$ ,  $\overline{DC} = \underline{v}$ ,  $\overline{DD'} = \underline{w}$ .  
 הנקודה  $F$  נמצאת באמצע המקצוע  $CC'$ ,  
 הנקודה  $E$  נמצאת על המקצוע  $AA'$   
 ומקיימת:  $A'E = 2AE$  והנקודה  $P$  נמצאת על  
 המקצוע  $BB'$  ומקיימת:  $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$ .  
 נתון:  $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$ .

- א. הבע באמצעות  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$ ,  $\underline{w}$  ו- $k$  את הווקטור  $\overline{DP}$ .  
 ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה  $P$  את המקצוע  $BB'$ .  
 ג. האם הנקודות  $D, E, F, P$  נמצאות על אותו מישור? נמק.

## תשובות סופיות:

$$\overline{PQ} = (1-\alpha)\underline{u} + \underline{v} - \frac{1}{1+\beta}\underline{w} \quad \text{א. (16)}$$

ג. לא.                      ב.  $\alpha = 1$

$$\overline{NM} = (\beta-1)\underline{u} + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} - \beta\right)\underline{v} + \underline{w} \quad \text{א. (17)}$$

ג.  $\alpha = \frac{\beta}{1-\beta}$                       ב.  $\beta = 1$

$$\overline{AP} = \frac{1}{2}t\underline{u} + \frac{1}{2}t\underline{v}, \quad \overline{AP} = (1-s)\underline{u} + \frac{2}{3}s\underline{v} \quad \text{א. (18)}$$

ב.  $BP:PE = 3:2, AP:PD = 4:1$

$$AP:PE = 2:1, CP:PF = 2:1 \quad \text{(19)}$$

$$\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}} = \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \text{AQ:QC} = 1:2 \quad \text{א. (20)}$$

$$\overline{DP} = \underline{u} + \underline{v} + (1-k)\underline{w} \quad \text{א. (21)}$$

ג. כן.                      ב.  $BP:PB = 1:5$

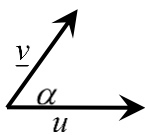
## מכפלה סקלרית וחישוב גודל של וקטור:

### סיכום כללי:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  תסומן:  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

כאשר  $\alpha$  היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.



ניתן למצוא את הזווית שבין שני ווקטורים ע"י:  $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

גודל של ווקטור נתון ע"י:  $|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$ , או:  $|\underline{u}|^2 = u^2$

### הערה:

המכפלה הסקלרית  $\underline{u} \cdot \underline{v}$  בין שני ווקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

### שאלות:

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

ב.  $\alpha = 120^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 4$

א.  $\alpha = 60^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 2$ ,  $|\underline{u}| = 3$

ד.  $\alpha = 180^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 3$ ,  $|\underline{u}| = 8$

ג.  $\alpha = 30^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 6$ ,  $|\underline{u}| = 2$

ו.  $\alpha = 90^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 4$ ,  $|\underline{u}| = 7$

ה.  $\alpha = 0^\circ$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 3$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

ב.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$ ,  $|\underline{v}| = 2$ ,  $|\underline{u}| = 4$

א.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$ ,  $|\underline{v}| = 4$ ,  $|\underline{u}| = 3$

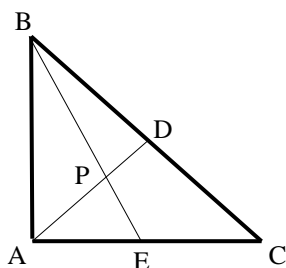
ד.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$ ,  $|\underline{v}| = 6$ ,  $|\underline{u}| = 2$

ג.  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$ ,  $|\underline{v}| = 5$ ,  $|\underline{u}| = 9$

**(24)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overline{PQ}$  שמוגדר:  $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .

**(25)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  המאונכים זה לזה שאורכם:  $|\underline{u}|=4$ ,  $|\underline{v}|=5$ .  
חשב את גודלו של הווקטור  $\overline{MN}$  שמוגדר:  $\overline{MN} = 0.5\underline{u} - \underline{v}$ .

**(26)** נתונים שני וקטורים  $\underline{u}$  ו- $\underline{v}$  שאורכם:  $|\underline{u}|=6$ ,  $|\underline{v}|=3$ . הזווית ביניהם היא  $120^\circ$ .  
חשב את גודל הזווית  $\sphericalangle QPM$  אם נתון:  $\overline{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$ ,  $\overline{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$ .

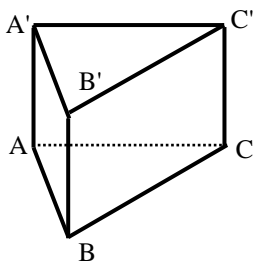


**(27)** המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ). הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.

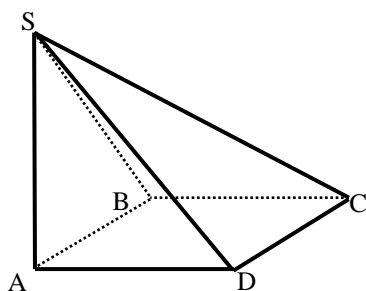
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נתון:  $AC = 12$ ,  $AB = 8$ ,  $\frac{AP}{PD} = 3$ .

חשב את גודל הזווית  $\sphericalangle DPC$ .



**(28)** נתונה מנסרה משולשת וישרה  $ABCA'B'C'$  שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8. הנקודה M היא אמצע המקצוע  $A'C'$  והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת:  $BN = 2CN$ .  
נסמן:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AC} = \underline{v}$ ,  $\overline{AA'} = \underline{w}$ .  
חשב את גודל הזווית:  $\sphericalangle MAN$ .



**(29)** בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

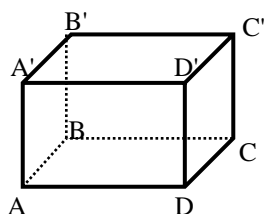
נתון:  $AB = AD = \frac{1}{2} AS = k$ .

נסמן:  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AS} = \underline{w}$ .

הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית:  $\sphericalangle PAQ$ .

(30) בתיבה  $ABCD A'B'C'D'$  נתון:  $\overline{AA'} = \underline{w}$ ,  $\overline{AD} = \underline{v}$ ,  $\overline{AB} = \underline{u}$ ,  $AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA'$ .



הנקודה P נמצאת על המקצוע  $A'B'$  ומקיימת:  $\frac{AP}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע  $DD'$ .

א. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו מתקיים:  $|\overline{AP}| = \frac{5}{6} |\overline{AQ}|$ ?

ב. הבע באמצעות  $\alpha$  את  $\cos \angle PAQ$

והראה כי לכל ערך של  $\alpha$  הזווית  $\angle PAQ$  חדה.

ג. מהו ערכו של  $\alpha$  שבעבורו הזווית  $\angle PAQ$  מקיימת:  $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$ ?

(31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים:  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$

(32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים:  $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$

(33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $S_{ABCD} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$

(34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD.

הוכח כי מתקיים:  $\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$

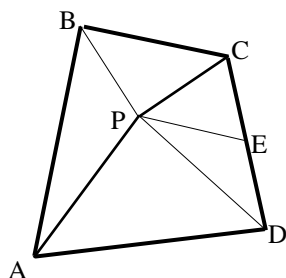
(35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה  $\overline{AS} \perp \overline{BC}$  ו-  $\overline{BS} \perp \overline{AC}$

הוכח:  $\overline{CS} \perp \overline{AB}$

(36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

37) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח:  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 0$ .
- ב. נתונה פירמידה משולשת SABC. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח:  $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$ .
- ג. נתון בנוסף כי  $\vec{AS}$  ו- $\vec{AP}$  מאונכים ל- $\vec{BC}$ . הוכח כי  $AB = AC$ . (הדרכה: סמן  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ ).



38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים ישרי זווית וש"ש ( $AP = PD$ ,  $BP = PC$ ).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח:  $\vec{PE} \perp \vec{AB}$ . (הדרכה: סמן  $\vec{PB} = \underline{a}$ ,  $\vec{PC} = \underline{b}$ ,  $\vec{PA} = \underline{c}$ ,  $\vec{PD} = \underline{d}$ ).

39) בטראדר SABC נתון:  $\vec{AB} = \underline{u}$ ,  $\vec{AC} = \underline{v}$ ,  $\vec{AS} = \underline{w}$ .

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת:  $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$ .

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת:  $\vec{SQ} = \beta(\vec{SB} + \vec{SC})$ .

א. מצא את הקשר בין  $\alpha$  ו- $\beta$  שבעבורו  $\vec{PQ}$  מקביל למישור ABC.

ב. נתון:  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ . הוכח:  $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$ .  $AB = AC$ .

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים, אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

**תשובות סופיות:**

- (22) א. 3 ב. -10 ג.  $6\sqrt{3}$  ד. -24 ה. 15 ו. 0.
- (23) א.  $60^\circ$  ב.  $150^\circ$  ג.  $90^\circ$  ד.  $0^\circ$
- (24)  $|\overline{PQ}| = 18.248$
- (25)  $|\overline{MN}| = \sqrt{29}$
- (26)  $31.87^\circ$
- (27)  $55.49^\circ$
- (28)  $70.623^\circ$
- (29)  $24.095^\circ$
- (30) א.  $\alpha = \frac{3}{4}$  ב.  $\cos(\sphericalangle PAQ) = \frac{1}{3\sqrt{1+\alpha^2}}$  ג.  $\alpha = \frac{1}{2}$
- (31) שאלת הוכחה.
- (32) שאלת הוכחה.
- (33) שאלת הוכחה.
- (34) שאלת הוכחה.
- (35) שאלת הוכחה.
- (36) שאלת הוכחה.
- (37) שאלת הוכחה.
- (38) שאלת הוכחה.
- (39) א.  $\alpha + 2\beta = 1$  ב. שאלת הוכחה.
- (40) שאלת הוכחה.