

מתמטיקה להנדסאי חשמל

פרק 14 - וקטורים במרחב כולל מכפלה וקטורית מכפלה מעורבת
ושימושיהם

תוכן העניינים

1. וקטורים.....1
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת.....8
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב.....10

וקטורים

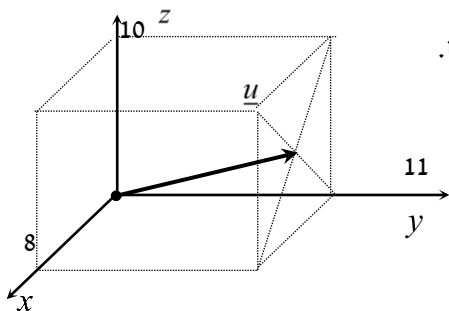
הערת סימון: נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1,-1,9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

$\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$.
 * בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$,
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
 $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.
 הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

(23) מצאו את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם :

$$A(-3, 2, 1), B(0, 3, 2), C(5, -1, 0)$$

(24) נתונים הווקטורים : $\underline{u} = (2, -1, 0), \underline{v} = (5, 0, 3)$

מצאו וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,

אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

(25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3, 2, 1)$ ו- $(1, -1, 2)$,

ושמרחקו מהווקטור $(1, 1, 0)$ הוא $\sqrt{3}$.

(26) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}| = |\underline{u} - \underline{v}|$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $\underline{u} \perp \underline{v} \Leftrightarrow |\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + |\underline{v}|^2$

הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

(27) ענו על חמשת הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $|\underline{u} + \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ב. הוכיחו כי $|\underline{u} - \underline{v}|^2 = |\underline{u}|^2 - 2\underline{u} \cdot \underline{v} + |\underline{v}|^2$

ג. הוכיחו כי $(\underline{u} - \underline{v})(\underline{u} + \underline{v}) = |\underline{u}|^2 - |\underline{v}|^2$

ד. הוכיחו כי $|\underline{u} + \underline{v}|^2 + |\underline{u} - \underline{v}|^2 = 2|\underline{u}|^2 + 2|\underline{v}|^2$

תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. הוכיחו כי $\frac{1}{4}(|\underline{u} + \underline{v}|^2 - |\underline{u} - \underline{v}|^2) = \underline{u} \cdot \underline{v}$

(28) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה. נגדיר $a = u - 2v$, $b = 3u + v$.
 אם α היא הזווית בין a ל- b , אז $\cos \alpha$ שווה ל-?

(29) יהיו $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ-0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k .
 יהי $v = \alpha w_1 + \frac{3}{4} w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1 .
 מהו המרחק של v מ- w_1 ?

(30) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u - v\| = 2$.
 הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \vec{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$\text{א.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{ב.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ג.} \quad (-17, 7, 24) \quad (10)$$

$$\text{א.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ב.} \quad (9.5, 9.5, -18) \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

$$S_{\triangle ABC} = 10.173 \quad \text{יח"ש.} \quad (23)$$

$$(-3, -6, 5) \quad (24)$$

$$v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad \text{or} \quad v = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (25)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (26)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{50}} \quad (28)$$

$$\frac{5}{4}k \quad (29)$$

(30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

(1) נתון: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
חשבו: $(u \times v) \times w$.

(2) חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8, 2, 3), B(4, -1, 2), C(-8, 0, 4)$.

(3) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
ידוע כי: $|u| \neq 0, u \cdot w = 0, u \times v = 0$.
הוכיחו כי: $v \cdot w = 0$.

(4) נתונים שני וקטורים u, v במרחב.
ידוע כי: $|v| = 4, |u| = 1, u \perp v$.
חשבו: $|(u+v) \times (u-v)|$.

(5) נתון: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$
חשבו:

א. $u \cdot (v \times w)$ ב. $v \cdot (w \times u)$ ג. $(u \times v) \cdot w$

(6) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$.
ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 2), D(4, 1, 1)$.

(7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודה $A(2, 2, 5), B(1, -1, -4), C(3, 3, 10), D(8, 6, 3)$.

(8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים a, b, c .
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $a, a-b, a+b-4c$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

(9) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v) \times (v+w)](u+w) = 2w \cdot (u \times v)$.

(10) נתונים שלושה וקטורים u, v, w במרחב.
ידוע כי: $u \cdot (v \times w) = 4$.
חשבו:

א. $u \cdot (w \times v)$

ב. $(v \times w) \cdot u$

ג. $w \cdot (u \times v)$

ד. $v \cdot (u \times w)$

(11) נתונים שלושה וקטורים a, b, c במרחב.
מהי הנוסחה עבור $a \times b \times c$?

תשובות סופיות

(1) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(2) $S = 22.5$

(3) שאלת הוכחה.

(4) 8

(5) א. -3 ב. -3 ג. -3

(6) א. -6 ב. 1

(7) $9\frac{1}{3}$

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

(11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

- (1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
 $A = (1, 2, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C = (2, 1, 2)$, $D(2, 2, 2)$

- (2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3, -2, 1)$ מהישר $L: (-10, 8, -8) + t(2, -1, 2)$.

- (3) נתונים שני ישרים:
- $$L_1: \frac{x-2}{2} = 3-y = \frac{z-4}{3}, \quad L_2: x+7 = y-5, \quad z=3$$
- א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
 ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

- (1) שאלת הוכחה.
 (2) $\sqrt{26}$
 (3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735