

מכינה במתמטיקה לחשמלאי מוסמך

פרק 15 - וקטורים אלגבריים

תוכן העניינים

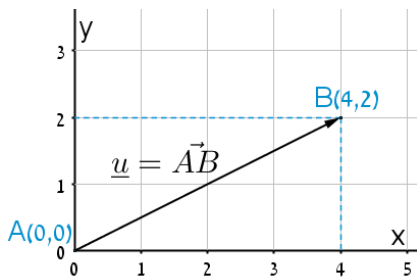
1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים..... 1
2. פעולות אלגבריות בין וקטורים..... 5
3. גודל של וקטור..... 7
4. וקטורים מקבילים ושווים..... 8
5. זווית בין וקטורים..... 9

שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

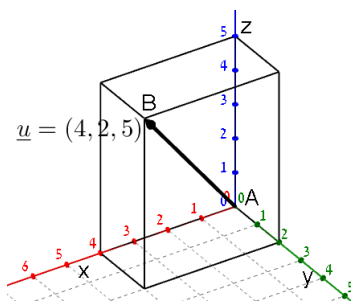
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x,y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u} = (4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u} = (4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(4,2,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

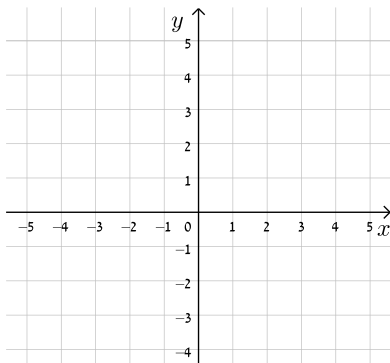
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\text{הוא: } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס

$$\text{של } k:l \text{ הם: } x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$$

שאלות:



1) שרטט את הווקטורים הבאים:

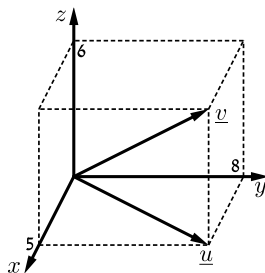
א. $\underline{u} = (4, 2)$

ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

ג. $\underline{w} = (3, -4)$

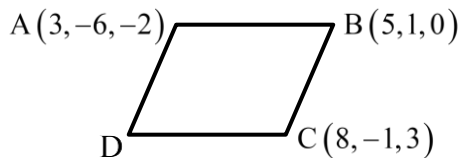
ד. $\underline{a} = (0, 3)$

ה. $\underline{b} = (-5, 0)$

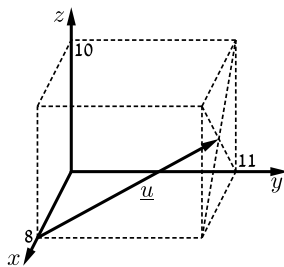


2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.

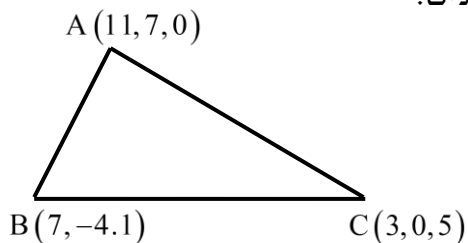


3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור). מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

6) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר:

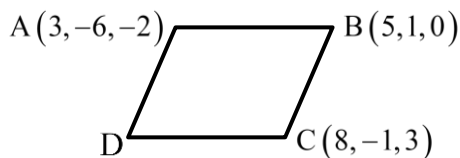
$$\underline{u} = (4, -1, 2), \quad \underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$$

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

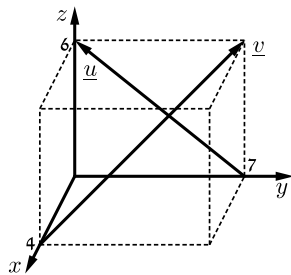
- א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו- $B(6,1)$.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

(8) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.
 ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.



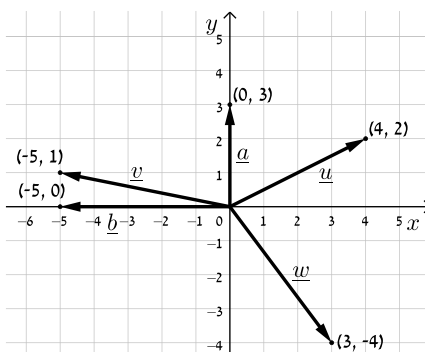
- (9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקדיה נתונים.
 מצא את שיעורי הקודקוד D .



- (10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
 מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2) $\underline{u} = (5, 8, 0)$, $\underline{v} = (5, 8, 6)$

3) $D(6, -8, 1)$

4) $\underline{u} = (4, 11, 5)$

5) $(7, 1, 2)$

6) $x = 5$, $y = -2$, $z = 6$

7) א. $\overrightarrow{AB} = (9, -4)$ ב. $Q(12, 8)$

8) א. $\overrightarrow{EF} = (5, -1, 0)$ ב. $N(-1, -5, 10)$

9) $D(6, -8, 1)$

10) $\underline{u} = (0, -7, 6)$, $\underline{v} = (-4, 7, 6)$

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של ווקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

שאלות:

11 נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u} = (4, 0, 9)$, $\underline{v} = (-1, 3, -5)$
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{u} - 2\underline{v}$, $3\underline{u} + 2\underline{v}$

12 נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$
חשב את:

א. $2\underline{u}$	ב. $-0.5\underline{v}$	ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$
ד. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$	ה. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$	ו. $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

13 נתונות הנקודות הבאות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$	ב. $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$	ג. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
--	--	---

14 נתונים שלושה ווקטורים: $\underline{u} = (6, -1, z)$, $\underline{v} = (0, y, 4)$, $\underline{w} = (x, 5, -10)$

א. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{w}$

ב. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $2\underline{v} - 3\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{u} = (6, y, z)$, $\underline{v} = (y-1, 2, x)$, $\underline{w} = (x, 2z, -10)$?

(15) נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{u} = (-6, 2, 3)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$.

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:

$$\underline{u} = (1, 7, -6), \underline{v} = (2, y, 4) \text{ תהיה } -1.$$

ג. מצא את y עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \underline{u} + \underline{v} = (3, 3, 4); \underline{u} - \underline{v} = (5, -3, 14); \underline{u} - 2\underline{v} = (6, -6, 19); 3\underline{u} + 2\underline{v} = (10, 6, 17)$$

$$(12) \quad \text{א. } (6, -2, 8) \quad \text{ב. } (-2, 1, 3) \quad \text{ג. } (-17, 7, 24)$$

$$\text{ד. } (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ה. } (9.5, 9.5, -18) \quad \text{ו. } (19, 19, -36)$$

$$(13) \quad \text{א. } (5, 7, 1) \quad \text{ב. } (-8, -16, 8) \quad \text{ג. } (8, 12, 0)$$

$$(14) \quad \text{א. } x = 6, y = 3, z = -18 \quad \text{ב. } x = -1, y = 9\frac{2}{3}, z = 72$$

$$\text{ג. } x = -4\frac{8}{9}, y = -4\frac{4}{9}, z = -\frac{2}{9}$$

$$(15) \quad \text{א. } \underline{u} \cdot \underline{v} = -21 \quad \text{ב. } y = 3 \quad \text{ג. } y = 3\frac{1}{7}$$

גודל של וקטור:

סיכום כללי:

גודלו של וקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

שאלות:

16 נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u} = (1, -3, 2)$, $\underline{v} = (5, -1, 0)$
חשב את הגדלים של הווקטורים הבאים: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $2\underline{v} + \underline{u}$, $4\underline{u} - 3\underline{v}$

17 נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
 $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

16 $|\underline{u}| = \sqrt{14}$; $|\underline{v}| = \sqrt{26}$; $|2\underline{v} + \underline{u}| = \sqrt{150}$; $|4\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{266}$
17 הוכחה.

וקטורים מקבילים ושווים:

שאלות:

18) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$$A(1,2,0), B(-2,5,3), C(-1,8,4), D(4,3,-1)$$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19) נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2), B(3,7,-4), C(6,9,0), D(7,4,10), E(9,11,4)$

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.

תשובות סופיות:

18) א. הוכחה. ב. כן.

19) א. הוכחה. ב. לא.

זווית בין וקטורים:

סיכום כללי:

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.

שאלות:

(20) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$.

(22) נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

(20) א. 92.277° ב. 90° ג. 180°

(21) 10.173 יח"ש.

(22) $\underline{w} = (3, 6, -5)$ או $\underline{w} = (-3, -6, 5)$.