

כלים מתמטיים 96039

פרק 14 - וקטורים אלגבריים - מבוא להצגה של וקטור במערכת צירים

תוכן העניינים

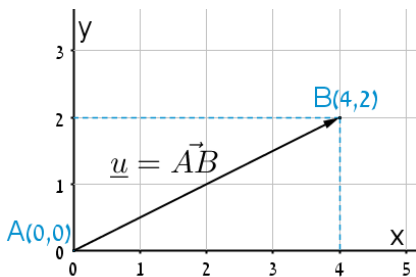
1. שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים.....1
2. פעולות אלגבריות בין וקטורים.....5
3. גודל של וקטור.....7
4. וקטורים מקבילים ושווים.....8
5. זווית בין וקטורים.....9

שאלות יסודיות עם וקטורים אלגבריים:

סיכום כללי:

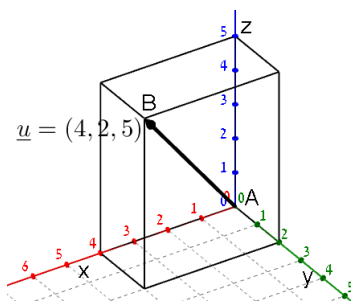
הגדרה כללית:

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u} = (x,y)$.



דוגמאות:

- הווקטור $\underline{u} = (4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u} = (4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי.

מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$

וסופו בנקודה: $B(4,2,5)$.

ווקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

ווקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1, y_1, z_1)$ וסופו בנקודה $B(x_2, y_2, z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

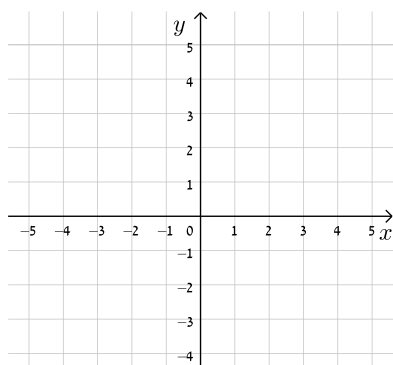
- אמצע הקטע M שקצותיו הם: $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$

$$\text{הוא: } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$ ביחס

$$\text{של } k:l \text{ הם: } x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k+l}; y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k+l}; z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k+l}$$

שאלות:



1) שרטט את הווקטורים הבאים :

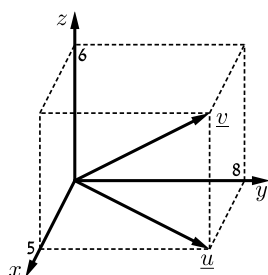
א. $\underline{u} = (4, 2)$

ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

ג. $\underline{w} = (3, -4)$

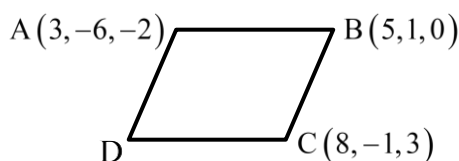
ד. $\underline{a} = (0, 3)$

ה. $\underline{b} = (-5, 0)$

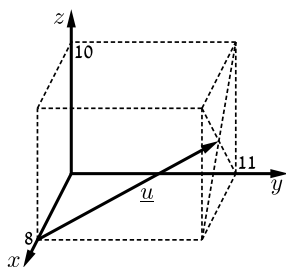


2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט.

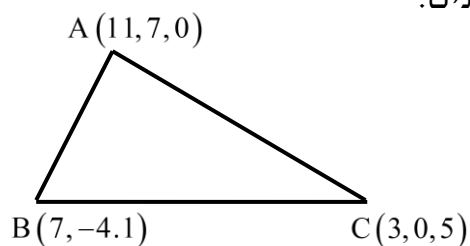


3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים (ראה איור). מצא את שיעורי הקודקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקודיו נתונים. מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

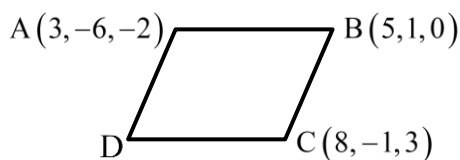
6) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר :

$$\underline{u} = (4, -1, 2), \quad \underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$$

(7) ענה על הסעיפים הבאים :

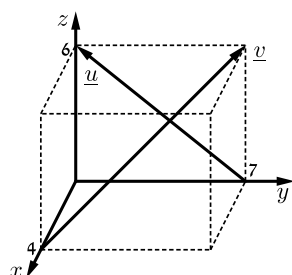
א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו- $B(6,1)$.ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$.

(8) ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.

(9) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה

מקודקודיה נתונים.

מצא את שיעורי הקודקוד D .

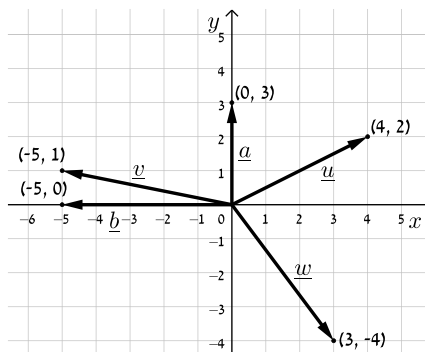
(10) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת

הצירים שלפניך.

מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

תשובות סופיות:

1) להלן סרטוט:



2) $\underline{u} = (5, 8, 0)$, $\underline{v} = (5, 8, 6)$

3) $D(6, -8, 1)$

4) $\underline{u} = (4, 11, 5)$

5) $(7, 1, 2)$

6) $x = 5$, $y = -2$, $z = 6$

7) א. $\overrightarrow{AB} = (9, -4)$ ב. $Q(12, 8)$

8) א. $\overrightarrow{EF} = (5, -1, 0)$ ב. $N(-1, -5, 10)$

9) $D(6, -8, 1)$

10) $\underline{u} = (0, -7, 6)$, $\underline{v} = (-4, 7, 6)$

פעולות אלגבריות בין וקטורים:

סיכום כללי:

מכפלה סקלרית בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u} \cdot \underline{v} = (x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

שאלות:

11 נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u} = (4, 0, 9)$, $\underline{v} = (-1, 3, -5)$
חשב את ערכי הווקטורים הבאים: $\underline{u} + \underline{v}$, $\underline{u} - \underline{v}$, $\underline{u} - 2\underline{v}$, $3\underline{u} + 2\underline{v}$

12 נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$
חשב את:

א. $2\underline{u}$	ב. $-0.5\underline{v}$	ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$
ד. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$	ה. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$	ו. $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

13 נתונות הנקודות הבאות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$
מצא את הווקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$	ב. $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$	ג. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$
--	--	---

14 נתונים שלושה וקטורים: $\underline{u} = (6, -1, z)$, $\underline{v} = (0, y, 4)$, $\underline{w} = (x, 5, -10)$

א. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $\underline{u} + 2\underline{v} = \underline{w}$

ב. מצא את ערכם של x, y, z המקיימים: $2\underline{v} - 3\underline{w} = \frac{1}{2}(\underline{u} + \underline{v})$

ג. כיצד תשתנה התוצאה של סעיף א' אם: $\underline{u} = (6, y, z)$, $\underline{v} = (y-1, 2, x)$, $\underline{w} = (x, 2z, -10)$?

(15) נתונים הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.

א. חשב את תוצאת המכפלה הסקלרית עבור: $\underline{u} = (-6, 2, 3)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$.

ב. מצא את y עבורו תוצאת המכפלה הסקלרית של הווקטורים:

$$\underline{u} = (1, 7, -6), \underline{v} = (2, y, 4) \text{ תהיה } -1.$$

ג. מצא את y עבורו הווקטורים מהסעיף הקודם יהיו מאונכים זה לזה.

תשובות סופיות:

$$(11) \quad \underline{u} + \underline{v} = (3, 3, 4); \underline{u} - \underline{v} = (5, -3, 14); \underline{u} - 2\underline{v} = (6, -6, 19); 3\underline{u} + 2\underline{v} = (10, 6, 17)$$

$$(12) \quad \text{א. } (6, -2, 8) \quad \text{ב. } (-2, 1, 3) \quad \text{ג. } (-17, 7, 24)$$

$$\text{ד. } (2.5, -1, -3.5) \quad \text{ה. } (9.5, 9.5, -18) \quad \text{ו. } (19, 19, -36)$$

$$(13) \quad \text{א. } (5, 7, 1) \quad \text{ב. } (-8, -16, 8) \quad \text{ג. } (8, 12, 0)$$

$$(14) \quad \text{א. } x = 6, y = 3, z = -18 \quad \text{ב. } x = -1, y = 9\frac{2}{3}, z = 72$$

$$\text{ג. } x = -4\frac{8}{9}, y = -4\frac{4}{9}, z = -\frac{2}{9}$$

$$(15) \quad \text{א. } \underline{u} \cdot \underline{v} = -21 \quad \text{ב. } y = 3 \quad \text{ג. } y = 3\frac{1}{7}$$

גודל של וקטור:

סיכום כללי:

גודלו של וקטור $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

שאלות:

16 נתונים הווקטורים הבאים: $\underline{u} = (1, -3, 2)$, $\underline{v} = (5, -1, 0)$
חשב את הגדלים של הווקטורים הבאים: $\underline{u}$, $\underline{v}$, $2\underline{v} + \underline{u}$, $4\underline{u} - 3\underline{v}$

17 נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
 $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

תשובות סופיות:

16 $|\underline{u}| = \sqrt{14}$; $|\underline{v}| = \sqrt{26}$; $|2\underline{v} + \underline{u}| = \sqrt{150}$; $|4\underline{u} - 3\underline{v}| = \sqrt{266}$
17 הוכחה.

וקטורים מקבילים ושווים:

שאלות:

18) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD :

$$A(1,2,0), B(-2,5,3), C(-1,8,4), D(4,3,-1)$$

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

19) נתונות הנקודות הבאות: $A(1,0,2), B(3,7,-4), C(6,9,0), D(7,4,10), E(9,11,4)$.

א. הראה כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמק.

תשובות סופיות:

18) א. הוכחה. ב. כן.

19) א. הוכחה. ב. לא.

זווית בין וקטורים:

סיכום כללי:

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ תחושב ע"י: $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$.

שאלות:

(20) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

(21) מצא את שטחו של משולש ABC שקודקודיו הם: $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$.

(22) נתונים הווקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

תשובות סופיות:

(20) א. 92.277° ב. 90° ג. 180°

(21) 10.173 יח"ש.

(22) $\underline{w} = (3, 6, -5)$ או $\underline{w} = (-3, -6, 5)$.