סטטיסטיקה וניתוח נתונים

פרק 22 - התפלגות מולטינומית

תוכן העניינים

1. כללי 1

התפלגות מולטינומית:

רקע:

ההתפלגות המולטינומית היא התפלגות רב-ממדית, המציינת את תוצאות סדרה של n ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי r תוצאות אפשריות עם סדרת הסתברויות הצלחה: $\left(p_1, p_2, \cdots, p_r\right)$ כאשר מתקיים ש: $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.

עבור: $i = 1, 2 \cdots r$, הרכיב Y_i של המשתנה המולטינומי מציין את מספר הפעמים בהן נתקבלה התוצאה ה- i, כאשר: $\sum_{i=1}^{r} Y_i = n$.

בצורה כללית ניתן לרשום את ההתפלגות המולטינומית באופן הבא:

$Y \sim multi\left(n, p_1, p_2 ..., p_r\right)$.

פונקציית ההסתברות המשותפת הרב מימדית היא:

$$P\left(Y_1 = y_1, \cdots, Y_r = y_r\right) = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ y_1, y_2, \cdots, y_r \end{pmatrix} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r} = \frac{n!}{y_1! \cdot y_2! \cdots y_r!} p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdots p_r^{y_r}.$$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

להלן תוצאות ההצבעה לעיר "מטושן":

המועמד	% מצביעים
טד סול	62%
בוב שפירו	12%
דורית מון	26%

נבחרו באקראי, ועם החזרה, 8 מצביעים מהעיר מטושן.

א. מה ההסתברות ש-4 מהם יצביעו עבור טד סול, 1 עבור בוב שפירו והיתר עבור דורית מון?

ב. רשמו את פונקציית ההסתברות המשותפת של מספר מצביעים במדגם לכל מתמודד.

שאלות:

1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. נשלפו באקראי ועם החזרה בין כדור לכדור 12 כדורים. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. 3 כדורים יהיו ירוקים ו-5 כדורים יהיו כחולים.

ב. 3 כדורים יהיו ירוקים.

ג. אם נתון שהוצאו 3 כדורים ירוקים, מה הסיכוי שהוצאו 5 כחולים?

2) נטיל קובייה הוגנת 10 פעמים.

א. מה הסיכוי לקבל פעם אחת את התוצאה 1, פעמיים את התוצאה 2 ושלוש פעמים את התוצאה 3?

ב. מצאו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שתתקבל התוצאה 1?

3) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי כאשר:

$p_1=0.5$, $p_2=0.3$, $p_3=0.2$, $n=20$.

X_i הוא מספר הניסויים שבהם התקבלה התוצאה i כאשר: $i=1,2,3$.

א. כיצד X_2 מתפלג?

ב. כיצד X_2+X_3 מתפלג?

ג. האם X_2 ו- X_1 הינם משתנים בלתי תלויים?

ד. כיצד $X_2|X_1=5$ מתפלג?

4) X הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי.

א. יש להוכיח שלכל $i\neq j$ מתקיים ש: $COV\left(X_i,X_j\right)=-n\cdot p_i\cdot p_j$.

ב. מהו מקדם המתאם בין X_i,X_j ? בטאו התשובה באמצעות n,p_i,p_j .

תשובות סופיות:

1) א. 0.0581. ב. 0.2362. ג. 0.246.

2) א. 0.0169. ב. תוחלת: $\frac{5}{3}$, שונות: $\frac{25}{18}$.

3) א. בינומי עם $p=0.3$, $n=20$. ב. בינומי עם $p=0.5$, $n=20$.

ג. לא. ד. בינומי עם $p=0.6$, $n=20$.

4) א. הוכחה. ב. $-\sqrt{\frac{p_i \cdot p_j}{(1-p_i)\cdot(1-p_j)}}$.