סטטיסטיקה וניתוח נתונים

פרק 23 - התפלגות לוג נורמלית

תוכן העניינים

1. התפלגות לוג נורמלית 1

התפלגות לוג נורמלית:

רקע:

נניח שלמשתנה Y ישנה התפלגות נורמלית, כלומר: $Y \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$.

נגדיר כעת את $X = e^Y$.

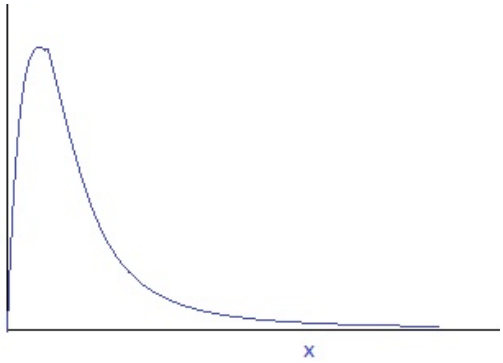
X הינו משתנה המתפלג לוג נורמלית.

הסיבה שקוראים להתפלגות באופן כזה היא ש- $\ln\left(X\right)=Y$ מתפלג נורמלית.

תחום ההגדרה של Y הינו $\left(-\infty,\infty\right)$ לעומת זאת תחום ההגדרה של X הינו $\left(0,\infty\right)$.

נסמן את ההתפלגות של X באופן הבא: $X \sim LOGN\left(\mu,\sigma^2\right)$.

בהתפלגות זו מתקיימים הקשרים הבאים: $E\left(X\right)=e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, $V\left(X\right)=\left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{2\mu+\sigma^2}$.



דוגמה (פתרון בהקלטה):

$X \sim LOGN\left(10,2^2\right)$.

מצאו את האחוזון התשעים של ההתפלגות.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתון: $X \sim LOGN\left(0,1^2\right)$.

א. מהי ההתפלגות של $\ln\left(X\right)=Y$?

ב. מהו החציון של X?

ג. חשבו את $P\left(X>e\right)$.

2) נתון שהשכר במשק מתפלג לוג נורמלית, התוחלת של השכר היא 10 יחידות כסף עם שונות 2. נתבונן בהתפלגות $\ln$ השכר.
כיצד מתפלג $\ln$ של השכר ומה התוחלת והשונות שלו?

3) הוכיחו שהחציון של: $X \sim LOGN\left(\mu,\sigma^2\right)$ הינו e^{μ}.

4) נתון ש- $X_i \sim LOGN\left(\mu,\sigma^2\right)$ לכל: $i=1,2,\ldots,\mathrm{n}$.
כמו כן ידוע שהתצפיות הן בלתי תלויות זו בזו.
הוכיחו: $\prod_{i=1}^{n} X_i \sim LOGN\left(n\mu,n\sigma^2\right)$.

5) אורך החיים של מכשיר מתפלג לוג נורמלית עם תוחלת של 6 שנים וסטיית תקן של 1.5 שנים.

א. מצא את העשירון העליון של אורך חיי המכשיר.

ב. מה ההסתברות שהמכשיר יחיה יותר מ-3 שנים?

6) שפנים מתרבים פי X_i בכול חודש. נתון ש- X_i מתפלג לוג נורמלית כאשר $E\left(X_i\right)=\sqrt{e}$, $V\left(X_i\right)=e\left(e-1\right)$.
מה ההסתברות שכעבור שנה כמות השפנים גדלה פי 20?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. התפלגות נורמלית סטנדרטית. ב. 1. ג. 0.1587.

2) $N\left(\mu=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{100}{1.02}\right),\sigma^2=\ln(1.02)\right)$.

3) הוכחה.

4) הוכחה.

5) א. 7.98. ב. 0.9963.

6) 0.1949.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל