

# הסתברות למהנדסים

פרק 33 - התפלגות גמא (ארלנג)

תוכן העניינים

1. התפלגות ארלנג ..... 1

## התפלגות ארלנג:

### רקע:

התפלגות זו הינה התפלגות רציפה התלויה בשני פרמטרים:  $k$  ו- $\lambda$ .  
 $X \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$

הפרמטר  $k$  הוא מספר שלם וחיובי פרמטר זה גם נקרא פרמטר הצורה.  
 הפרמטר  $\lambda$  הוא פרמטר ממשי וחיובי שנקרא פרמטר הקצב.  
 תחום ההגדרה של ההתפלגות הוא  $X \geq 0$ .

בהנחה ולפנינו תהליך עם זרם פואסוני הזמן הדרוש עד הופעת האירוע ה- $k$  מרגע מסוים מתפלג התפלגות ארלנג כאשר הפרמטר  $\lambda$  מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן.

### דוגמה:

מספר הפניות למוקד מתפלג פואסוני עם קצב של 3 פניות לדקה.  
 מהי ההתפלגות של הזמן שעובר מרגע פתיחת המוקד ועד קבלת הפניה הרביעית?

$W_i \sim P(\lambda = 3)$  - מספר הפניות למוקד בדקה.

$$k = 4$$

$X \sim \text{Erlang}(4, 3)$  - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

פונקציית הצפיפות של  $X$  בהתפלגות ארלנג:  $f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$

פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות:  $F(t) = P(X \leq t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \cdot (\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}$

**בהמשך לדוגמה:**

מה ההסתברות שמרגע פתיחת המוקד יעברו פחות מ-2 דקות עד שהפניה הרביעית תתקבל במוקד?

$X \sim \text{Erlang}(4, 3)$  - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - \sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} \cdot (3 \cdot 2)^i \cdot e^{-3 \cdot 2} = 1 - e^{-6} \left( \frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} \right) = 0.8488$$

**התוחלת של ההתפלגות:**  $E(X) = \frac{k}{\lambda}$

**השונות של התפלגות:**  $V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$

**בהמשך לדוגמה:**

מהי התוחלת וסטיית התקן של הזמן שיחלוף מרגע פתיחת המוקד ועד שתתקבל הפניה הרביעית למוקד?

$X \sim \text{Erlang}(4, 3)$  - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

$$E(X) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ דקות}$$

$$V(X) = \sqrt{\frac{4}{3^2}} = \frac{2}{3} \text{ דקות}$$

אם:  $X_1, X_2, \dots, X_k$  משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים כך ש-  $X_i \sim \exp(\lambda)$

עבור כל:  $1 \leq i \leq k$ , אזי:  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$

### בהמשך לדוגמה:

הראו את הקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית בדוגמה המוצגת.

$X_i \sim \exp(\lambda)$  - הזמן בדקות בין פניה לפניה.

$X_i$  - ב"ת.

$k = 4, i = 1, 2, 3, 4$ .

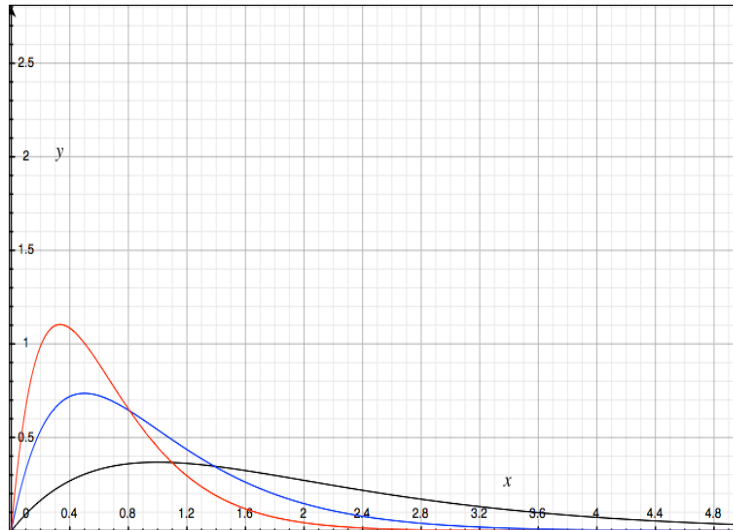
$X_1$  - הזמן עד הפניה הראשונה.

$X_2$  - הזמן בין הפניה הראשונה לשנייה וכו'...

$\sum_{i=1}^4 X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim \text{Erlang}(k=4, \lambda=3)$  - הזמן הכולל עד הפניה הרביעית בדקות.

**גרפים של פונקציית הצפיפות בהתפלגות ארלנג:**

$k = 2$

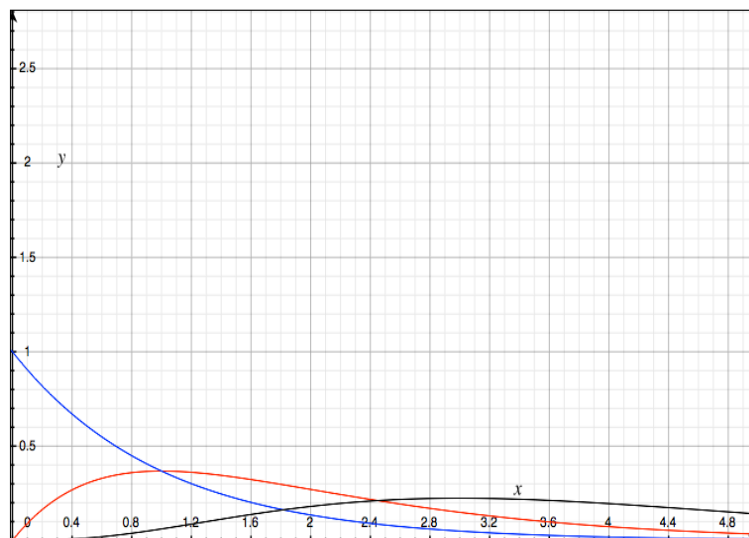
**מקרא:**


$\lambda = 1$  —————

$\lambda = 2$  —————

$\lambda = 3$  —————

$\lambda = 1$

**מקרא:**


$k = 1$  —————

$k = 2$  —————

$k = 4$  —————

## שאלות:

- (1) נתון:  $X \sim \text{Erlang}(2, 5)$ .
- מצאו את:  $P(X > 3)$ .
  - מצאו את:  $P(X > 3 | X > 5)$ .
  - מצאו את:  $E(X)$ .
- (2) צריכת החשמל היומית בחברה מסוימת מתפלגת התפלגות ארלנג עם תוחלת 2 ושונות 2.
- מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 4?
  - מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 2 אך לא תהיה יותר מ-5?
  - החברה עובדת 5 ימים בשבוע, מה תוחלת מספר הימים בשבוע בה צריכת החשמל היומית בחברה קטנה מ-4?
- (3) אורך החיים של סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 4 שעות באופן בלתי תלוי בסוללה אחרת. במכשיר מתקינים 4 סוללות. בכל רגע נתון רק סוללה אחת מפעילה את המכשיר. ברגע שסוללה מתרוקנת היא מוחלפת במיידית בסוללה אחרת עד אשר כל ארבע הסוללות מתרוקנות.
- מה התוחלת והשונות של אורך חיי מערכת הסוללות במכשיר?
  - מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה נמוך מיממה?
  - מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה גדול מיומיים אם ידוע שהיה גדול מיממה?
- (4) מספר תקלות המחשב במערכת מתפלג פואסונית על קצב של 3 תקלות בשעה.
- מה ההסתברות שהזמן עד התקלה הראשונה יהיה קטן משעה?
  - מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השנייה יהיה קטן משעה?
  - מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השלישית יהיה קטן משעה?
  - הסבירו את ההבדלים בין הסעיפים.
- (5) הוכיחו שאם:  $X \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ , אזי מתקיים ש- $E(X) = \frac{k}{\lambda}$ ,  $V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$ .  
 רמז: היעזרו בקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית.

(6) פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות ארלנג הנה:  $1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} (\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}$

הראו דרכה שפונקציית הצפיפות של ההתפלגות ארלנג היא:  $f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$

### תשובות סופיות:

- (1) א. 0.000005      ב. 1      ג. 0.4
- (2) א. 0.0915      ב. 0.36558      ג. 4.5425
- (3) א. תוחלת : 16 שעות, שונות :  $64^2$  (שעות).      ב. 0.8488      ג. 0.0023
- (4) א. 0.9502      ב. 0.8009      ג. 0.5768
- ד. ראה סרטון.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.