# סטטיסטיקה

## פרק 1 - התפלגות גמא (ארלנג)

תוכן העניינים

# התפלגות גמא:

## רקע:

משתנה מקרי בעל התפלגות גמא תלוי בשני פרמטרים שמאפיינים אותו, $t$ ו- $\lambda$.

נהוג לסמן זאת כך: $X \sim Gamma(t,\lambda)$.

פרמטרים אלו מקיימים: $\lambda > 0$ ו- $t > 0$.

התפלגות גמא היא התפלגות רציפה בעלת פונקציית הצפיפות הבאה: $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t-1}}{\Gamma(t)}.$$

$\Gamma(t)$, המכונה פונקציית גמא, מוגדרת על ידי: $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-y} y^{t-1} dy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו את פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי בעל התפלגות: $Gamma(2,3)$.

תשובה:

$t = 2 \;,\; \lambda = 3$

$$f(x) = \frac{3e^{-3x}\cdot(3x)}{\Gamma(2)} \;,\; x > 0$$

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty e^{-y}\cdot y^{t-1} dy = \int_0^\infty e^{-y}\cdot y\; dy$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int v'\cdot u$$

$v = y \;,\; u' = e^{-y}$

$v' = 1 \;,\; u = -e^{-y}$

$$= -\frac{y}{e^y}\Big|_0^\infty + (-e^{-y})\Big|_0^\infty = -\frac{y+1}{e^y}\Big|_0^\infty = 0 - \left[\frac{-(0+1)}{e^0}\right] = 1$$

$$f(x) = qx\cdot e^{-3x} \;,\; x > 0$$

**תוחלת ושונות של התפלגות גמא:**

התוחלת של משתנה מקרי $X$ בעל התפלגות גמא היא: $E[X]=\frac{t}{\lambda}$.

השונות של משתנה מקרי $X$ בעל התפלגות גמא היא: $\text{Var}(X)=\frac{t}{\lambda^2}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו את התוחלת והשונות של משתנה מקרי בעל התפלגות: $Gamma(2,3)$.

תשובה:

$$E[x]=\frac{2}{3}$$
$$\text{var}(x)=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$$

פונקציית גמא מקיימת את התכונה הבאה: $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1)$ לכל $t>1$.

אם $X_i$ הוא משתנה מקרי בעל התפלגות גמא עם הפרמטרים $t_i$ ו-$\lambda$
לכל: $i=1,2,\dots,n$, ואם: $X_1,X_2,\dots,X_n$.

בלתי-תלויים זה בזה, אז $\sum_{i=1}^{n}X_i$ הוא משתנה מקרי בעל התפלגות גמא עם

הפרמטרים $\sum_{i=1}^{n}t_i$ ו-$\lambda$.

דוגמה:

$X\sim Gamma(2,3)$, ו- $Y\sim Gamma(1,3)$.
כמו כן נתון ששני המשתנים בלתי תלויים זה בזה.

מה ההתפלגות של $X+Y$?

תשובה:

$$X+Y\sim Gamma(3,3)$$

כאשר $t$ הוא מספר שלם וחיובי, נסמן אותו ב- $n$.
במקרה זה מתקיים: $\Gamma(n)=(n-1)!$.
להתפלגות זו קוראים לעיתים "התפלגות ארלנג": $X \sim Erlang(n,\lambda)$.
אם הזמן עד להתרחשות המופע הראשון מרגע כלשהו מתפלג מעריכית, אז הזמן עד התרחשות המופע ה- $n$ יהיה בעל התפלגות ארלנג עם הפרמטרים: $(n,\lambda)$.
למעשה, התפלגות מעריכית היא מקרה פרטי של התפלגות גמא.
אפשר לומר ש- $Gamma(1,\lambda)=Erlang(1,\lambda)=Exp(\lambda)$.

אם: $X_1, X_2, \dots, X_n$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים זה בזה שמתפלגים מעריכית כך ש- $X_i \sim exp(\lambda)$ לכל: $1 \le i \le n$, אז: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i \sim erlang(n,\lambda)$.
פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי בעל התפלגות ארלנג היא:
$f(x)=\frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}$.
פונקציית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי בעל התפלגות ארלנג היא:
$F_X(t)=1-\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}$.

דוגמה:

מספר הפניות למוקד טלפוני מתפלג פואסונית בקצב של 3 פניות לדקה.

א. מה ההתפלגות של הזמן שעובר מרגע פתיחת המוקד ועד קבלת הפנייה השנייה?

ב. מה ההסתברות שמרגע פתיחת המוקד יעברו פחות מ-1.5 דקות עד שתתקבל הפנייה השנייה?

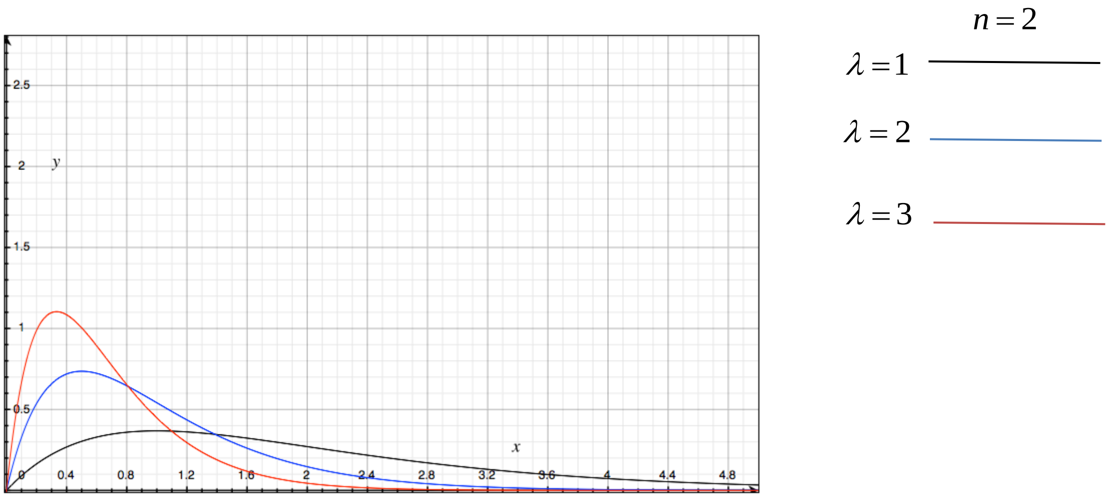
תשובה:

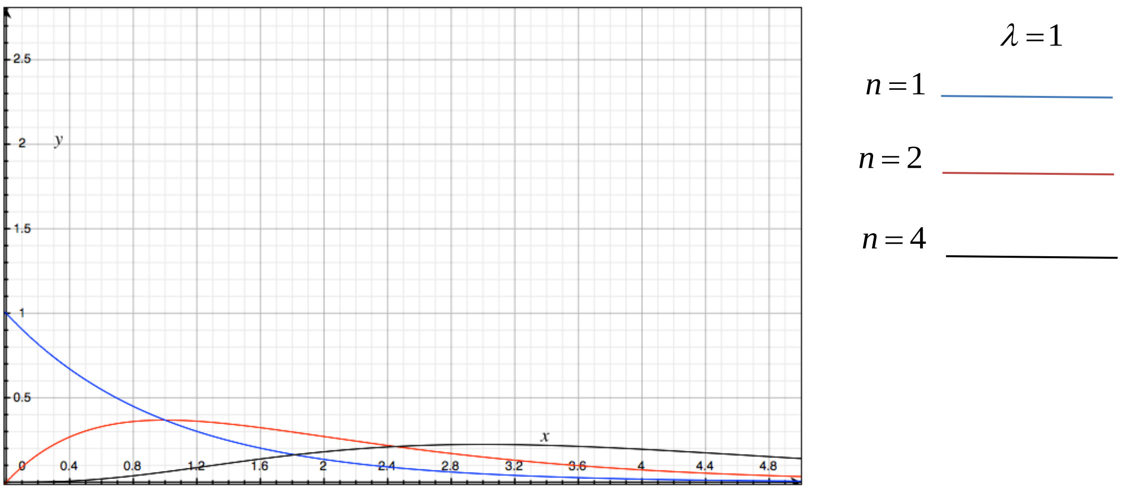
א. $X \sim Erlang(n=2, \lambda=3)$: הזמן בדקות עד קבלת הפניה השנייה.

ב.

$$P(x<1.5)=F_x(1.5)=1-\sum_{i=0}^{1}\frac{1}{i!}\cdot(3\cdot 1.5)^i \cdot e^{-3\cdot 1.5}=1-\left[\frac{1}{0!}\cdot 4.5^0 \cdot e^{-4.5}+\frac{1}{1!}\cdot 4.5^1 \cdot e^{-4.5}\right]=0.9389$$

**תיאור גרפי של פונקציית הצפיפות בהתפלגות גמא:**



## שאלות:

**1)** נתון ש- $X \sim Erlang(2,5)$.

א. מצאו את: $P(X>3)$.

ב. מצאו את: $P(X>3|X>5)$.

ג. מצאו את: $E(X)$.

**2)** צריכת החשמל היומית בחברה מסוימת מתפלגת התפלגות ארלנג עם תוחלת 2 ושונות 2.

א. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תהיה יותר מ-4?

ב. מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תהיה יותר מ-2 אך לא יותר מ-5?

ג. החברה עובדת חמישה ימים בשבוע. מה התוחלת של מספר הימים בשבוע שבהם צריכת החשמל היומית בחברה קטנה מ-4?

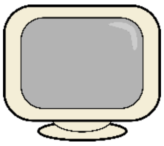
**3)** אורך חיי סוללה בשעות מתפלג מעריכית עם תוחלת של 4 ואינו תלוי באורך חיי סוללות אחרות. במכשיר מתקינים ארבע סוללות. בכל רגע נתון רק סוללה אחת מפעילה את המכשיר. ברגע שסוללה מתרוקנת היא מוחלפת מיד בסוללה אחרת, עד אשר כל ארבע הסוללות מתרוקנות.

א. מה התוחלת והשונות של אורך חייה של מערכת הסוללות במכשיר?

ב. מה ההסתברות שאורך חייה של מערכת הסוללות יהיה פחות מיום (יממה)?

ג. מה ההסתברות שאורך חייה של מערכת הסוללות יהיה יותר מיומיים אם ידוע שהוא יותר מיום?

**4)** מספר תקלות המחשב במערכת מתפלג פואסונית בקצב של 3 תקלות בשעה.

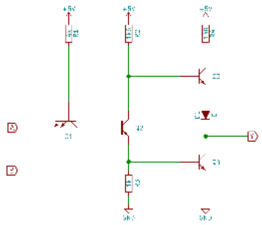


א. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה הראשונה יהיה פחות משעה?

ב. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השנייה יהיה פחות משעה?

ג. מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השלישית יהיה פחות משעה?

ד. הסבירו את ההבדלים בין הסעיפים.



**5)** פונקציית ההתפלגות המצטברת של אורך החיים (בשעות) של רכיב אלקטרוני מסוים
היא: $F(x)=1-e^{-2x}-2xe^{-2x}\ ,\ x\ge 0$
חשבו את התוחלת והשונות של אורך חיי הרכיב.

**6)** היעזרו באינטגרציה בחלקים כדי להראות שפונקציית גמא מקיימת את התכונה הבאה: $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1)$ לכל $t>1$.

**7)** הוכיחו שאם $n$ הוא מספר שלם וחיובי, אז פונקציית גמא מקיימת: $\Gamma(n)=(n-1)!$. היעזרו בתכונה: $\Gamma(t)=(t-1)\Gamma(t-1)$ לכל $t>1$.

**8)** נתון ש- $X\sim Gamma(t,\lambda)$.
הוכיחו בעזרת פונקציית הצפיפות של התפלגות גמא ש:
א. $E[X]=\frac{t}{\lambda}$.
ב. $\text{Var}(X)=\frac{t}{\lambda^2}$.

**9)** פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות ארלנג היא: $F_X(t)=1-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i!}\cdot(\lambda t)^i\cdot e^{-\lambda t}$.
הראו דרכה שפונקציית הצפיפות של ההתפלגות ארלנג היא: $f(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$.

**10)** פתרו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(t)}\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{t+1}dx$ (שימו לב: הפתרון מבוטא באמצעות הפרמטר $t$).

**11)** $X$ הוא משתנה מקרי שמתפלג מעריכית עם הפרמטר $\lambda$.
$Y=X^k\ ,\ k=1,2,\dots$ מצאו את התוחלת של $Y$.

**12)** נתונה פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי $X$: $f_X(x)=\frac{3^{k+1}e^{-3x}x^k}{9!},\ \ x>0$.
א. מצאו את $k$.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של $X$.

**13)** נתון ש- $X\sim Gamma(t,\lambda)$. מהי ההתפלגות של $bX$ כאשר $b>0$?

## תשובות סופיות:

1) א. 0.000005. ב. 1 ג. 0.4.

2) א. 0.0915. ב. 0.36558. ג. 4.5425.

3) א. תוחלת: 16 שעות, שונות: 64. ב. 0.8488. ג. 0.0023.

4) א. 0.9502. ב. 0.8009. ג. 0.5768.

ד. הזמן עד התקלה $k$, $P(x\le 1)\downarrow \;\; \Rightarrow \;\; k\uparrow :P(x\le 1)$.

5) תוחלת: 1, שונות: 0.5.

6) שאלה הוכחה.

7) שאלה הוכחה.

8) שאלה הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $t(t+1)$.

11) $\frac{k!}{\lambda^k}$.

12) א. 9. ב. תוחלת: $3.33\overline{3}$, שונות: $1.11\overline{1}$.

13) $Y \sim Gamma(t, \frac{\lambda}{b})$.