

מבוא לסטטיסטיקה והסתברות

פרק 37 - התפלגות גמא (ארלנג)

תוכן העניינים

1. התפלגות ארלנג 1

התפלגות ארלנג:

רקע:

התפלגות זו הינה התפלגות רציפה התלויה בשני פרמטרים: k ו- λ .
 $X \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$

הפרמטר k הוא מספר שלם וחיובי פרמטר זה גם נקרא פרמטר הצורה.
 הפרמטר λ הוא פרמטר ממשי וחיובי שנקרא פרמטר הקצב.
 תחום ההגדרה של ההתפלגות הוא $X \geq 0$.

בהנחה ולפנינו תהליך עם זרם פואסוני הזמן הדרוש עד הופעת האירוע ה- k מרגע מסוים מתפלג התפלגות ארלנג כאשר הפרמטר λ מייצג את קצב האירועים ביחידת זמן.

דוגמה:

מספר הפניות למוקד מתפלג פואסוני עם קצב של 3 פניות לדקה.
 מהי ההתפלגות של הזמן שעובר מרגע פתיחת המוקד ועד קבלת הפניה הרביעית?

$W_i \sim P(\lambda = 3)$ - מספר הפניות למוקד בדקה.

$$k = 4$$

$X \sim \text{Erlang}(4, 3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

פונקציית הצפיפות של X בהתפלגות ארלנג: $f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$

פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות: $F(t) = P(X \leq t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} \cdot (\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}$

בהמשך לדוגמה:

מה ההסתברות שמרגע פתיחת המוקד יעברו פחות מ-2 דקות עד שהפניה הרביעית תתקבל במוקד?

$X \sim \text{Erlang}(4, 3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - \sum_{i=0}^3 \frac{1}{i!} \cdot (3 \cdot 2)^i \cdot e^{-3 \cdot 2} = 1 - e^{-6} \left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} + \frac{6^3}{3!} \right) = 0.8488$$

התוחלת של ההתפלגות: $E(X) = \frac{k}{\lambda}$

השונות של התפלגות: $V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$

בהמשך לדוגמה:

מהי התוחלת וסטיית התקן של הזמן שיחלוף מרגע פתיחת המוקד ועד שתתקבל הפניה הרביעית למוקד?

$X \sim \text{Erlang}(4, 3)$ - הזמן בדקות עד לפניה הרביעית.

$$E(X) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ דקות}$$

$$V(X) = \sqrt{\frac{4}{3^2}} = \frac{2}{3} \text{ דקות}$$

אם: $X_1, X_2, \dots, X_k$ משתנים מקריים מעריכיים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim \exp(\lambda)$

עבור כל: $1 \leq i \leq k$, אזי: $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$

בהמשך לדוגמה:

הראו את הקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית בדוגמה המוצגת.

$X_i \sim \exp(\lambda)$ - הזמן בדקות בין פניה לפניה.

X_i - ב"ת.

$k = 4, i = 1, 2, 3, 4$.

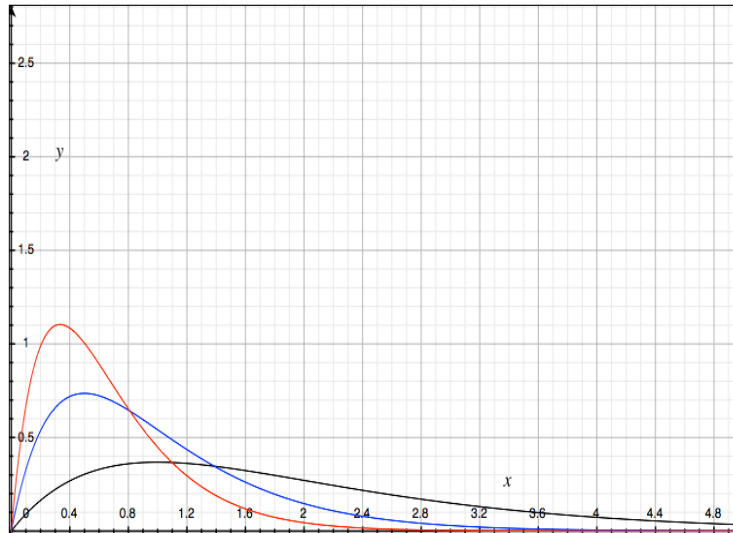
X_1 - הזמן עד הפניה הראשונה.

X_2 - הזמן בין הפניה הראשונה לשנייה וכו'...

הזמן הכולל עד הפניה הרביעית בדקות. $\sum_{i=1}^4 X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim \text{Erlang}(k=4, \lambda=3)$

גרפים של פונקציית הצפיפות בהתפלגות ארלנג:

$k = 2$

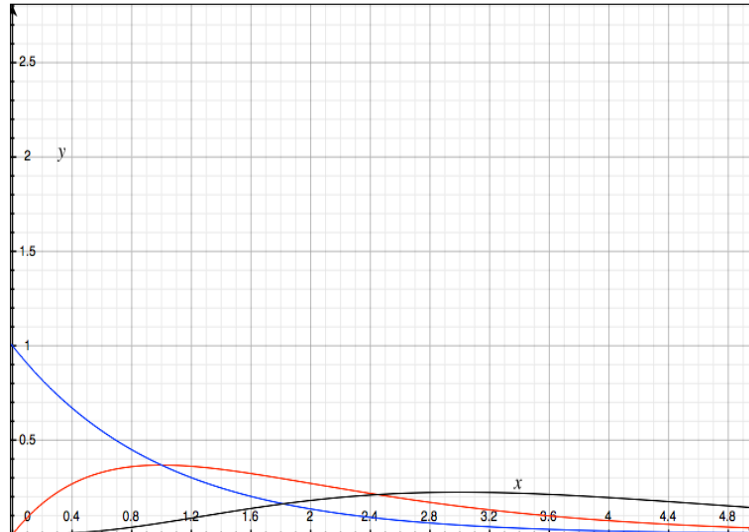
מקרא:


$\lambda = 1$ —————

$\lambda = 2$ —————

$\lambda = 3$ —————

$\lambda = 1$

מקרא:


$k = 1$ —————

$k = 2$ —————

$k = 4$ —————

שאלות:

- (1) נתון: $X \sim \text{Erlang}(2, 5)$.
- מצאו את: $P(X > 3)$.
 - מצאו את: $P(X > 3 | X > 5)$.
 - מצאו את: $E(X)$.
- (2) צריכת החשמל היומית בחברה מסוימת מתפלגת התפלגות ארלנג עם תוחלת 2 ושונות 2.
- מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 4?
 - מה ההסתברות שצריכת החשמל היומית בחברה תעלה על 2 אך לא תהיה יותר מ-5?
 - החברה עובדת 5 ימים בשבוע, מה תוחלת מספר הימים בשבוע בה צריכת החשמל היומית בחברה קטנה מ-4?
- (3) אורך החיים של סוללה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 4 שעות באופן בלתי תלוי בסוללה אחרת. במכשיר מתקינים 4 סוללות. בכל רגע נתון רק סוללה אחת מפעילה את המכשיר. ברגע שסוללה מתרוקנת היא מוחלפת במיידית בסוללה אחרת עד אשר כל ארבע הסוללות מתרוקנות.
- מה התוחלת והשונות של אורך חיי מערכת הסוללות במכשיר?
 - מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה נמוך מיממה?
 - מה ההסתברות שאורך חיי מערכת הסוללות במכשיר יהיה גדול מיומיים אם ידוע שהיה גדול מיממה?
- (4) מספר תקלות המחשב במערכת מתפלג פואסונית על קצב של 3 תקלות בשעה.
- מה ההסתברות שהזמן עד התקלה הראשונה יהיה קטן משעה?
 - מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השנייה יהיה קטן משעה?
 - מה ההסתברות שהזמן עד התקלה השלישית יהיה קטן משעה?
 - הסבירו את ההבדלים בין הסעיפים.
- (5) הוכיחו שאם: $X \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$, אזי מתקיים ש- $E(X) = \frac{k}{\lambda}$, $V(X) = \frac{k}{\lambda^2}$.
 רמז: היעזרו בקשר בין התפלגות ארלנג להתפלגות המעריכית.

(6) פונקציית ההתפלגות המצטברת של התפלגות ארלנג הנה: $1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{i!} (\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}$

הראו דרכה שפונקציית הצפיפות של ההתפלגות ארלנג היא: $f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$

תשובות סופיות:

- (1) א. 0.000005 ב. 1 ג. 0.4
- (2) א. 0.0915 ב. 0.36558 ג. 4.5425
- (3) א. תוחלת : 16 שעות, שונות : 64^2 (שעות). ב. 0.8488 ג. 0.0023
- (4) א. 0.9502 ב. 0.8009 ג. 0.5768
- ד. ראה סרטון.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.