תורת ההסתברות

פרק 36 - התפלגות ביתא (פרק 5 ממ"ן 12)

תוכן העניינים

1. בתפלגות ביתא 1

התפלגות ביתא:

רקע:

משתנה מקרי שמתפלג התפלגות ביתא הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}.$$

משתנה זה תלוי בשני פרמטרים שמאפיינים אותו a ו- b, כאשר: $a>0$, $b>0$.

$B(a,b)$ היא פונקציה שמכונה "פונקציית ביתא" ומוגדרת באופן הבא:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

אם המשתנה X מתפלג התפלגות ביתא עם הפרמטרים a ו- b, נכתוב זאת:

$X\sim Beta(a,b)$.

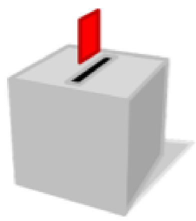
המשתנה המקרי המתפלג התפלגות ביתא מייצג הסתברות.

כלומר, אנחנו מתייחסים להסתברות עצמה כאל משתנה מקרי.

דוגמה:

נסמן ב-X את שיעור האזרחים שיצביעו למועמד מסוים בבחירות שבהן מתמודדים שני מועמדים.

נניח ש- $X\sim Beta(2,1)$.



א. בנו את פונקציית הצפיפות של X.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של X.

ג. חשבו את הסיכוי שרוב האזרחים יצביעו למועמד מסוים זה בבחירות.

תוחלת ושונות של משתנה מקרי בעל התפלגות ביתא:

התוחלת של X תהיה: $E[X]=\dfrac{a}{a+b}$.

השונות של X תהיה: $\mathrm{Var}(X)=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

דוגמה:

נתון ש- $X\sim Beta(2,1)$. מה תהיה התוחלת ומה תהיה השונות של X?

תכונות של פונקציית ביתא והתפלגות ביתא:

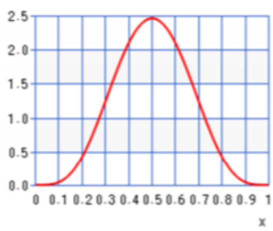
1. $B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
2. $B(a,b)=B(b,a)$.
3. $Beta(1,1)=U(0,1)$.

דוגמה:

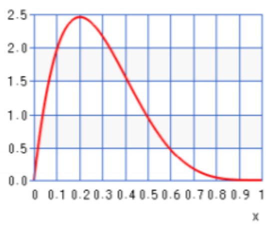
הראו ש- $B(1,2)$ מקיימת את שתי התכונות הראשונות שהוצגו לעיל.

הפרמטרים a ו- b נקראים "פרמטרי הצורה", כיוון שהם משפיעים על הצורה של פונקציית הצפיפות. בגרפים הבאים נראה כיצד הם משפיעים עליה.

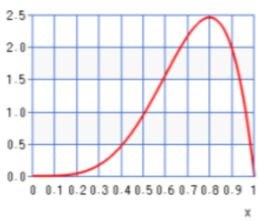
$a>1\,,\ b>1\,,\ a=b$



$a>1\,,\ b>1\,,\ a>b$

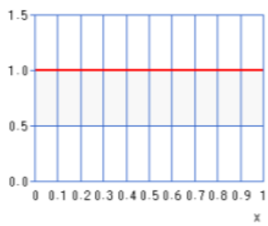


$a>1\,,\ b>1\,,\ a<b$



$a<1\,,\ b<1\,,\ a=b$

$a=b=1$



שאלות:

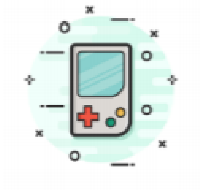
1) מתוכנן תהליך שמטרתו לשנות את שיעור המוצרים הפגומים בקו ייצור מסוים. שיעור המוצרים הפגומים אחרי הטמעת התהליך יהיה משתנה מקרי בעל התפלגות: $Beta(3,1)$.

א. מצאו את התוחלת והשונות של שיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך המתוכנן.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של שיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך.

ג. חשבו את הסיכוי ששיעור המוצרים הפגומים בקו הייצור אחרי הטמעת התהליך יהיה קטן מ-10%.

2) משחק מחשב מתוכנת כך שהסיכוי לנצח בסבב אחד הוא משתנה מקרי בעל התפלגות: $Beta(2,2)$.



א. מצאו את החציון של ההתפלגות.

ב. מה ההסתברות שהסיכוי לנצח בסבב כלשהו יהיה יותר מ-0.7?

3) הראו שפונקציית ביתא מקיימת את התכונה: $B(a,b)=B(b,a)$.

4) נתון ש- $X \sim Beta(a,b)$.

א. הוכיחו: $E[X]=\dfrac{a}{a+b}$.

ב. הוכיחו: $\operatorname{Var}(X)=\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

5) הוכיחו את הטענה ש- $Beta(1,1)=U(0,1)$.

6) השכיח של משתנה רציף הוא הערך שעבורו פונקציית הצפיפות של המשתנה היא מקסימלית.
מצאו את השכיח של X, אם: $X \sim Beta(2,3)$.

7) X הוא משתנה מקרי שמתפלג התפלגות ביתא עם הפרמטרים: $a=5$ ו-$b=6$.
חשבו את: $E\left[\frac{1}{X}\right]$.

8) $X \sim Beta(a,b)$.
נגדיר: $Y=1-X$.
הוכיחו ש-$Y \sim Beta(b,a)$.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{80}$, $\frac{3}{4}$. ב. $F_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \left.\frac{3x^3}{3}\right|_0^t=t^3 & 0\le t<1\\ 1 & t>1\end{cases}$. ג. 0.001.
2) א. 0.5. ב. 0.216.
3) הוכחה.
4) הוכחה.
5) הוכחה.
6) $\frac{1}{3}$.
7) 2.5.
8) הוכחה.