

# משוואות דיפרנציאליות

## פרק 6 - התמרת לפלס

### תוכן העניינים

1. התמרת לפלס ..... 1
2. התמרת לפלס ההפוכה ..... 4
3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס ..... 8
4. נוסחאות - התמרת לפלס ..... 10

## התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

### שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות 1-12 בעזרת טבלת התמרות לפלס:

$$L(t^2 + 4t - 2) \quad (1) \quad L\left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t} + 1\right) \quad (2)$$

$$L(e^{-4t} + 10e^{2t}) \quad (3) \quad L(\cosh 4t) \quad (4)$$

$$L(\sinh 10t) \quad (5) \quad L(\sin 2t \cos 2t) \quad (6)$$

$$L(\sin 2t \cos 3t) \quad (7) \quad L(\sin^2 t) \quad (8)$$

$$L(\cos^2 4t) \quad (9) \quad L(t^2 \sin 4t) \quad (10)$$

$$L(t^4 e^{2t}) \quad (11) \quad L(e^{2t} \sin 4t) \quad (12)$$

$$(13) \text{ מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה } g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$(14) \text{ מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה } g(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leq 1 \\ 2-t & 1 < t \end{cases}$$

(15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



16 מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



17 מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה :



18 הגדירו ושרטטו את פונקציית המדרגה  $u(t)$  ואת ההזזה שלה  $u(t-k)$ .

19 שרטטו את הפונקציה  $f(t) = u(t-2) - u(t-3)$ , כאשר  $u(t)$  פונקציית המדרגה.

20 רשמו את הפונקציה  $f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$ , בעזרת פונקציית המדרגה.

21 רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה  $u(t)$ , של הפונקציה  $u(t-k)$ , ושל הפונקציה  $f(t-k)u(t-k)$ .

22 חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה :  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ (t-4)^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

23 חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה :  $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 4 \\ t^2 & t \geq 4 \end{cases}$ .

24 ענו על הסעיפים הבאים :

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא  $\delta(t)$ .

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה  $\delta(t-a)$ ?

## תשובות סופיות

- $$\frac{12}{s^5} + s^{-3/2} + \frac{1}{s} \quad (2)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-4} + \frac{1}{s+4} \right] \quad (4)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{s^2 + 16} \quad (6)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 4} \quad (8)$$
- $$\frac{8(3s^2 - 16)}{(s^2 + 16)^3} \quad (10)$$
- $$\frac{4}{(s-2)^2 + 16} \quad (12)$$
- $$\frac{1 - 2e^{-s}}{s^2} \quad (14)$$
- $$\frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})} \quad (16)$$
- $$u(t-k) = \begin{cases} 0 & t < k \\ 1 & t \geq k \end{cases} \quad (18)$$
- $$\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} - \frac{2}{s} \quad (1)$$
- $$\frac{1}{s+4} + 10 \frac{1}{s-2} \quad (3)$$
- $$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-10} - \frac{1}{s+10} \right] \quad (5)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{s^2 + 25} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \quad (7)$$
- $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2 + 64} \quad (9)$$
- $$\frac{24}{(s-2)^5} \quad (11)$$
- $$\frac{1 - e^{-s}}{s^2} \quad (13)$$
- $$\frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2}}{s^2(1 - e^{-2s})} \quad (15)$$
- $$\frac{1 - e^{-s} - se^{-2s}}{s^2(1 - e^{-2s})} \quad (17)$$
- $$(19)$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases} = u(t-4) \quad (20)$$

$$L(u(t-k)f(t-k)) = e^{-ks}L(f(t)) \quad (21)$$

$$L((t-4)^2 \cdot u(t-4)) = \frac{2e^{-4s}}{s^3} \cdot \mathcal{N} \quad (22)$$

$$e^{-4s}L(t^2) + 8e^{-4s}L(t) + 16\frac{e^{-4s}}{s} \quad (23)$$

$$L[\delta(t-2\pi)] = e^{-2\pi s} \quad (24)$$

## התמרת לפלס ההפוכה

### שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות 1-29 :

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \quad (1)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right) \quad (2)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right) \quad (3)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) \quad (4)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) \quad (5)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right) \quad (6)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right) \quad (7)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) \quad (8)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right) \quad (9)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (10)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right) \quad (11)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right) \quad (12)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right) \quad (13)$$

$$L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right) \quad (14)$$

$$L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right) \quad (15)$$

$$L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right) \quad (16)$$

$$L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right) \quad (17)$$

$$L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right) \quad (18)$$

$$L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right) \quad (19)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right) \quad (20)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right) \quad (21)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right) \quad (22)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right) \quad (23)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right) \quad (24)$$

$$L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right) \quad (26)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right) \quad (25)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) \quad (28)$$

$$L^{-1}\left(\frac{3}{s} - \frac{4e^{-s}}{s^2} + \frac{4e^{-3s}}{s^2}\right) \quad (27)$$

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right) \quad (29)$$

\* בשאלה 27 כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

$$(30) \text{ נתון } F(s) = \frac{e^{-s} + 2}{s}$$

חשבו את  $f(0)$  ו- $f(\infty)$ , כאשר  $f(t) = L^{-1}(F(s))$ .  
פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה:  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ ,  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ .

(31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right) \quad (32)$$

$$L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right) \quad (33)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right) \quad (34)$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right) \quad (35)$$

## תשובות סופיות

- (1)  $1$
- (2)  $\frac{t^3}{3!}$
- (3)  $e^{10t}$
- (4)  $\frac{1}{3} \sin 2t$
- (5)  $\cos 2t$
- (6)  $e^{10t} \frac{1}{2} \sin 2t$
- (7)  $e^{2t} \left\{ \cos 2t + 2 \frac{1}{2} \sin 2t \right\}$
- (8)  $\frac{1}{4} t \sin 2t$
- (9)  $\frac{1}{4} t \sin 2t$
- (10)  $\frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}}$
- (11)  $\frac{1}{4} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{-2t}$
- (12)  $1 - 2e^{-5t}$
- (13)  $3e^{-3t} - 2e^{-2t}$
- (14)  $1 + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t}$
- (15)  $e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{3t}$
- (16)  $e^{-3t} + e^{3t} - e^{-2t} - e^{2t}$
- (17)  $e^{2t} + 4te^{2t} - e^{-2t}$
- (18)  $-6 + 5t + 6e^{-2t}$
- (19)  $4 - 4e^{-3t} - 3te^{-3t}$
- (20)  $2e^t + te^t - 2e^{2t} + te^{2t}$
- (21)  $\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \sqrt{2}t$
- (22)  $\frac{1}{\sqrt{0.75}} e^{-0.5t} \sin \sqrt{0.75}t$
- (23)  $\sin t + 2e^{3t}$
- (24)  $\cos t + e^{-2t}$
- (25)  $\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t$
- (26)  $e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + 5t \sin 2t + \frac{5}{4} (\sin 2t - 2t \cos 2t)$
- (27) א.  $3 - 4u(t-1) \cdot (t-1) + 4u(t-3) \cdot (t-3)$

ב.  $\begin{cases} 3 & t < 1 \\ 7 - 4t & 1 < t < 3 \\ -5 & t \geq 3 \end{cases}$  ; שרטוט:



$$u(t-4)e^{-(t-4)} + u(t+2)\sin(t+2) \quad (28)$$

$$u(t-10)(e^{t-10} - e^{2(t-10)}) \quad (29)$$

$$f(0) = 2 \quad f(\infty) = 3 \quad (30)$$

$$(31) \text{ שאלת הסבר.}$$

$$-\frac{1}{2}(t^2 + 2t + 2) + e^t \quad (32)$$

$$0.5t - \frac{1}{4}\sin 2t \quad (33)$$

$$\frac{1}{4}e^{4t}(t-1) + \frac{1}{4} \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}(-2\cos t + 2 - t\sin t) \quad (35)$$

## פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

### שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

$$y(0) = 0 ; y' + 4y = e^{-3t} \quad (1)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = 4 ; y'' + 4y' + 4y = 10e^{-2t} \quad (2)$$

$$y(0) = -1, y'(0) = -4 ; y'' - 4y' = 16 \quad (3)$$

$$y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 4y' = 8t + 2 \quad (4)$$

$$y(0) = y'(0) = \frac{1}{4} ; 4y'' - 4y' = te^t + e^t \quad (5)$$

$$, y(0) = y'(0) = 0 ; y'' - 3y' + 2y = u(t-4) \quad (6)$$

$$\text{כאשר } u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \text{ היא פונקציית המדרגה.}$$

$$. f(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2 & t \geq 1 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + y' = f(t) \quad (7)$$

$$. h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases} \text{ כאשר } , y(0) = y'(0) = 0 ; y'' + 5y' + 6y = h(t) \quad (8)$$

$$y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 3 ; y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10 \cos t \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi) \quad (10)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = -3 ; y'' + 3y' - 10y = 4\delta(t - 2) \quad (11)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0 ; -y'' + 4y = \delta(t - 2\pi) - \delta(t - \pi) \quad (12)$$

## תשובות סופיות

$$y(t) = e^{-3t} - e^{-4t} \quad (1)$$

$$y(t) = e^{-2t} (5t^2 + 2t - 1) \quad (2)$$

$$y(t) = -4t - 1 \quad (3)$$

$$y(t) = t^2 \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{8} e^t (t^2 + 2) \quad (5)$$

$$y(t) = u(t-4) (0.5 - e^{t-4} + e^{2(t-4)}) \quad (6)$$

$$y(t) = 2u(t-1) \cdot (-1 + (t-1) + e^{-(t-1)}) \quad (7)$$

$$y(t) = \frac{1}{6} [1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}] - u(t-2) \frac{1}{6} [1 - 3e^{-2(t-2)} + 2e^{-3(t-2)}] \quad (8)$$

$$y(t) = -\cos t + 2 \sin t + 2e^{-t} - 2te^{-t} - e^{-2t} \quad (9)$$

$$y(t) = -u(t-\pi) e^{-(t-\pi)} \sin(t) \quad (10)$$

$$y(t) = \frac{4}{7} u(t-2) [e^{2(t-2)} - e^{-5(t-2)}] + e^{2t} + e^{-5t} \quad (11)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} u(t-2\pi) [\sinh(2(t-2\pi))] + \frac{1}{2} u(t-\pi) [\sinh(2(t-\pi))] \quad (12)$$

## נוסחאות – התמרת לפלס

| $G(s)$                    | $g(t)$                                               |
|---------------------------|------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{s}$             | 1                                                    |
| $\frac{1}{s^2}$           | $t$                                                  |
| $\frac{n!}{s^{n+1}}$      | $t^n$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$ )                    |
| $\frac{1}{s^n}$           | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ (for $n = 1, 2, 3, \dots$ ) |
| $\frac{1}{s-a}$           | $e^{at}$                                             |
| $\frac{1}{(s-a)^n}$       | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$                      |
| $\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$  | $t^{n-1} e^{at}$                                     |
| $\frac{s}{s^2+a^2}$       | $\cos(at)$                                           |
| $\frac{a}{s^2+a^2}$       | $\sin(at)$                                           |
| $\frac{s}{s^2-a^2}$       | $\cosh(at)$                                          |
| $\frac{a}{s^2-a^2}$       | $\sinh(at)$                                          |
| $\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$   | $\frac{t}{2a} \sin(at)$                              |
| $\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$ | $\frac{1}{2a} (\sin(at) + at \cos(at))$              |
| $\frac{a}{[(s+b)^2+a^2]}$ | $e^{-bt} \sin at$                                    |

|                                         |                                          |
|-----------------------------------------|------------------------------------------|
| $\frac{s+b}{(s+b)^2+a^2}$               | $e^{-bt} \cos at$                        |
| $\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$               | $t \sin at$                              |
| $\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$           | $t \cos at$                              |
| $\frac{1}{(s-a)^2}$                     | $te^{at}$                                |
| $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$                 | $\frac{1}{2a^3}(\sin(at) - at \cos(at))$ |
| $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$ | $\sqrt{t}$                               |
| $\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$            | $\frac{1}{\sqrt{t}}$                     |
| $\frac{1}{s}$                           | $u(t)$                                   |
| $\frac{e^{-ks}}{s}$                     | $u(t-k)$                                 |
| $e^{-ks} \cdot F(s)$                    | $u(t-k) f(t-k)$                          |
| $(-1)^n (F(s))^{(n)}$                   | $t^n g(t)$                               |

## תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה  $F(s)$ , של פונקציה  $f(t)$ , ורוצים את  $f(0)$  ו- $f(\infty)$ .

אז במקום למצוא את  $f(t)$  ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx \quad - \text{קונבולוציה:}$$

$$\boxed{L(f(t) * g(t)) = F(s) \cdot G(s)}$$

$$L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = f(t) * g(t) \qquad L^{-1}(F(s) \cdot G(s)) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$