משוואות דיפרנציאליות רגילות

פרק 4 - התמרת לפלס

תוכן העניינים

1. התמרת לפלס 1
2. התמרת לפלס ההפוכה 4
3. פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס 8
4. נוסחאות - התמרת לפלס 10

התמרת לפלס

בסוף ספר הפרק יש דף נוסחאות להתמרת לפלס.

שאלות

חשבו את התמרות לפלס בשאלות **1-12** בעזרת טבלת התמרות לפלס:

1) $L\left(t^2+4t-2\right)$

2) $L\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{t}+1\right)$

3) $L\left(e^{-4t}+10e^{2t}\right)$

4) $L\left(\cosh 4t\right)$

5) $L\left(\sinh 10t\right)$

6) $L\left(\sin 2t\cos 2t\right)$

7) $L\left(\sin 2t\cos 3t\right)$

8) $L\left(\sin^2 t\right)$

9) $L\left(\cos^2 4t\right)$

10) $L\left(t^2\sin 4t\right)$

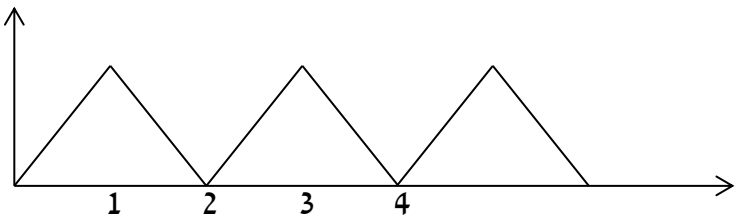
11) $L\left(t^4e^{2t}\right)$

12) $L\left(e^{2t}\sin 4t\right)$

13) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 1 & t>1 \end{cases}$.

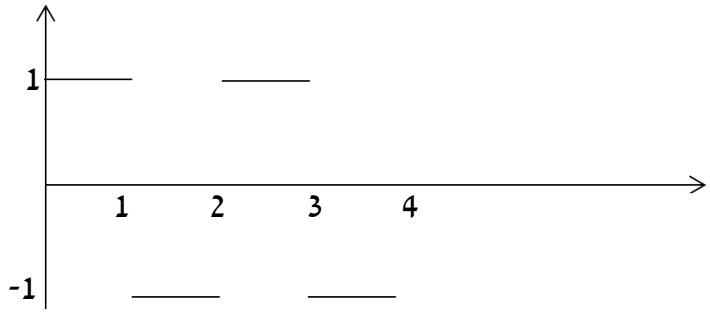
14) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה $g(t)=\begin{cases} t & 0<t\le 1 \\ 2-t & 1<t \end{cases}$.

15) מצאו את התמרת לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:

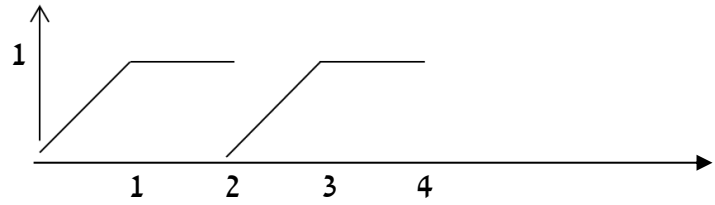


כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



17) מצאו טרנספורם לפלס של הפונקציה המחזורית הבאה:



18) הגדירו ושרטט את פונקציית המדרגה $u(t)$ ואת ההזזה שלה $u(t-k)$.

19) שרטטו את הפונקציה $f(t)=u(t-2)-u(t-3)$, כאשר $u(t)$ פונקציית המדרגה.

20) רשמו את הפונקציה $f(t)=\begin{cases}0 & t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$, בעזרת פונקציית המדרגה.

21) רשמו את הנוסחה להתמרת לפלס של פונקציית המדרגה $u(t)$,
של הפונקציה $u(t-k)$, ושל הפונקציה $f(t-k)u(t-k)$.

22) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ (t-4)^2 & t\ge 4\end{cases}$.

23) חשבו את התמרת לפלס של הפונקציה הבאה: $g(t)=\begin{cases}0 & t<4\\ t^2 & t\ge 4\end{cases}$.

24) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו ושרטטו את פונקציית הדלתא $\delta(t)$.

ב. מהי התמרת לפלס של פונקציית הדלתא, ושל ההזזה שלה $\delta(t-a)$?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{2}{s^3}+\frac{4}{s^2}-\frac{2}{s}$

2) $\frac{12}{s^5}+s^{-3/2}+\frac{1}{s}$

3) $\frac{1}{s+4}+10\frac{1}{s-2}$

4) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-4}+\frac{1}{s+4}\right]$

5) $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-10}-\frac{1}{s+10}\right]$

6) $\frac{1}{2}\frac{4}{s^2+16}$

7) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{s^2+25}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}$

8) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+4}$

9) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+64}$

10) $\frac{8\left(3s^2-16\right)}{\left(s^2+16\right)^3}$

11) $\frac{24}{(s-2)^5}$

12) $\frac{4}{(s-2)^2+16}$

13) $\frac{1-e^{-s}}{s^2}$

14) $\frac{1-2e^{-s}}{s^2}$

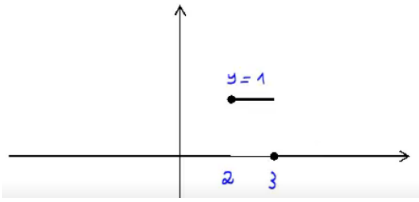
15) $\frac{1-2e^{-s}+e^{-2}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)}$

16) $\frac{1-e^{-s}}{s\left(1+e^{-s}\right)}$

17) $\frac{1-e^{-s}-se^{-2s}}{s^2(1-e^{-2s})}$

18) $u(t-k)=\begin{cases}0 & t<k\\ 1 & t\geq k\end{cases}$

19)



20) $f(t)=\begin{cases}0 & t\leq\\ 1 & t>4\end{cases}=u(t-4)$

21) $L=\left(u(t-k)\,f(t-k)\right)=e^{-ks}L\left(f(t)\right)$

22) א. $L\left((t-4)^2\cdot u(t-4)\right)=\frac{2e^{-4s}}{s^3}$

23) $e^{-4s}L\left(t^2\right)+8e^{-4t}L(t)+16\frac{e^{-4s}}{s}$

24) $L\left[\delta(t-2\pi)\right]=e^{-2\pi s}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

התמרת לפלס ההפוכה

שאלות

חשבו את ההתמרות בשאלות **1-29**:

1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$

2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^4}\right)$

3) $L^{-1}\left(\frac{1}{s-10}\right)$

4) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$

5) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$

6) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s-10)^2+4}\right)$

7) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s-2)^2+4}\right)$

8) $L^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right)$

9) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)^2}\right)$

10) $L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$

11) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2-4}\right)$

12) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^2+5s}\right)$

13) $L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+5s+6}\right)$

14) $L^{-1}\left(\frac{s^2+s-1}{s^3-s}\right)$

15) $L^{-1}\left(\frac{6s^2+4s-6}{s^3-7s-6}\right)$

16) $L^{-1}\left(\frac{10s}{s^4-13s^2+36}\right)$

17) $L^{-1}\left(\frac{8s}{(s-2)^2(s+2)}\right)$

18) $L^{-1}\left(\frac{5-s}{s^3+s^2}\right)$

19) $L^{-1}\left(\frac{9s+36}{s^3+6s^2+9s}\right)$

20) $L^{-1}\left(\frac{1}{(s^2-2s+1)(s^2-4s+4)}\right)$

21) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+3}\right)$

22) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+s+1}\right)$

23) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+s-1}{(s^2+1)(s-3)}\right)$

24) $L^{-1}\left(\frac{2s^2+2s+1}{(s^2+1)(s+2)}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

25) $L^{-1}\left(\frac{3}{(s^2+1)(s^2+4)}\right)$

26) $L^{-1}\left(\frac{25s^2}{(s-1)(s^2+4)^2}\right)$

27) $L^{-1}\left(\frac{3}{s}-\frac{4e^{-s}}{s^2}+\frac{4e^{-3s}}{s^2}\right)$

28) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s+1}+\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$

29) $L^{-1}\left(\frac{e^{-10s}}{(s-1)(s-2)}\right)$

*בשאלה **27** כתבו את התוצאה בצורה מפורטת ושרטטו אותה.

30) נתון $F(s)=\frac{e^{-s}+2}{s}$.

חשבו את $f(0)$ ו-$f(\infty)$, כאשר $f(t)=L^{-1}(F(s))$.

פתרו בשתי דרכים שונות.

הערה: $f(0)=\lim_{t\to 0} f(t)$, $f(\infty)=\lim_{t\to\infty} f(t)$.

31) הסבירו והדגימו את משפט הקונוולוציה.

השתמשו במשפט הקונוולוציה כדי לחשב את התרגילים הבאים:

32) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^3(s-1)}\right)$

33) $L^{-1}\left(\frac{2}{s^2(s^2+4)}\right)$

34) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s-4)^2}\right)$

35) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+1)^2}\right)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{t^3}{3!}$

3) e^{10t}

4) $\frac{1}{3}\sin 2t$

5) $\cos 2t$

6) $e^{10t}\frac{1}{2}\sin 2t$

7) $e^{2t}\left\{\cos 2t+2\frac{1}{2}\sin 2t\right\}$

8) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

9) $\frac{1}{4}t\sin 2t$

10) $\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}}$

11) $\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}$

12) $1-2e^{-5t}$

13) $3e^{-3t}-2e^{-2t}$

14) $1+\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}$

15) $e^{-t}+2e^{-2t}+3e^{3t}$

16) $e^{-3t}+e^{3t}-e^{-2t}-e^{2t}$

17) $e^{2t}+4te^{2t}-e^{-2t}$

18) $-6+5t+6e^{-2t}$

19) $4-4e^{-3t}-3te^{-3t}$

20) $2e^{t}+te^{t}-2e^{2t}+te^{2t}$

21) $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$

22) $\frac{1}{\sqrt{0.75}}e^{-0.5t}\sin\sqrt{0.75}t$

23) $\sin t+2e^{3t}$

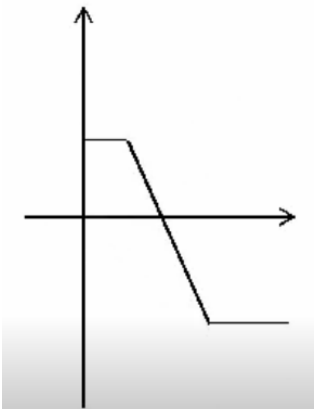
24) $\cos t+e^{-2t}$

25) $\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t$

26) $e^{t}-\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+5t\sin 2t+\frac{5}{4}\left(\sin 2t-2t\cos 2t\right)$

27) א. $3-4u(t-1)\cdot(t-1)+4u(t-3)\cdot(t-3)$

ב. $\begin{cases}3 & t<1\\ 7-4t & 1<t<3\\ -5 & t\geq 3\end{cases}$; שרטוט:



כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $u(t-4)e^{-(t-4)}+u(t+2)\sin(t+2)$

29) $u(t-10)\left(e^{t-10}-e^{2(t-10)}\right)$

30) $f(0)=2 \quad f(\infty)=3$

31) שאלת הסבר.

32) $-\frac{1}{2}\left(t^2+2t+2\right)+e^t$

33) $0.5t-\frac{1}{4}\sin 2t$

34) $\frac{1}{4}e^{4t}(t-1)+\frac{1}{4}$

35) $\frac{1}{2}\left(-2\cos t+2-t\sin t\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרון מדר בעזרת התמרת לפלס

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות בעזרת התמרת לפלס:

1) $y(0)=0\ ;\ y'+4y=e^{-3t}$

2) $y(0)=-1\ ,\ y'(0)=4\ ;\ y''+4y'+4y=10e^{-2t}$

3) $y(0)=-1,\ y'(0)=-4\ ;\ y''-4y'=16$

4) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+4y'=8t+2$

5) $y(0)=y'(0)=\frac{1}{4}\ ;\ 4y''-4y'=te^{t}+e^{t}$

6) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''-3y'+2y=u(t-4)$,
כאשר $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$ היא פונקציית המדרגה.

7) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+y'=f(t)$, כאשר $f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & t\geq 1\end{cases}$.

8) $y(0)=y'(0)=0\ ;\ y''+5y'+6y=h(t)$, כאשר $h(t)=\begin{cases}1 & 0<t<2\\ 0 & t\geq 2\end{cases}$.

9) $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=3\ ;\ y'''+4y''+5y'+2y=10\cos t$

10) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ y''+2y'+2y=\delta(t-\pi)$

11) $y(0)=2,\ y'(0)=-3\ ;\ y''+3y'-10y=4\delta(t-2)$

12) $y(0)=0,\ y'(0)=0\ ;\ -y''+4y=\delta(t-2\pi)-\delta(t-\pi)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y(t)=e^{-3t}-e^{-4t}$

2) $y(t)=e^{-2t}(5t^2+2t-1)$

3) $y(t)=-4t-1$

4) $y(t)=t^2$

5) $y(t)=\frac{1}{8}e^{t}(t^2+2)$

6) $y(t)=u(t-4)\left(0.5-e^{t-4}+e^{2(t-4)}\right)$

7) $y(t)=2u(t-1)\cdot\left(-1+(t-1)+e^{-(t-1)}\right)$

8) $y(t)=\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\right]-u(t-2)\frac{1}{6}\left[1-3e^{-2(t-2)}+2e^{-3(t-2)}\right]$

9) $y(t)=-\cos t+2\sin t+2e^{-t}-2te^{-t}-e^{-2t}$

10) $y(t)=-u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t)$

11) $y(t)=\frac{4}{7}u(t-2)\left[e^{2(t-2)}-e^{-5(t-2)}\right]+e^{2t}+e^{-5t}$

12) $y(t)=-\frac{1}{2}u(t-2\pi)\left[\sinh\left(2(t-2\pi)\right)\right]+\frac{1}{2}u(t-\pi)\left[\sinh\left(2(t-\pi)\right)\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – התמרת לפלס

$G(s)$	$g(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \ (\text{for } n=1,2,3,\ldots)$
$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
$\frac{1}{(s-a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}(\sin(at)+at\cos(at))$
$\frac{a}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\sin at$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

$\frac{s+b}{\left[(s+b)^2+a^2\right]}$	$e^{-bt}\cos at$
$\frac{2sa}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\sin at$
$\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\frac{1}{2a^3}\left(\sin(at)-at\cos(at)\right)$
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-\frac{3}{2}}$	$\sqrt{t}$
$\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$
$\frac{1}{s}$	$u(t)$
$\frac{e^{-ks}}{s}$	$u(t-k)$
$e^{-ks}\cdot F(s)$	$u(t-k)f(t-k)$
$(-1)^n\left(F(s)\right)^{(n)}$	$t^n g(t)$

תוספות

- נניח שנתונה התמרת לפלס ההפוכה $F(s)$, של פונקציה $f(t)$,
ורוצים את $f(0)$ ו-$f(\infty)$.
אז במקום למצוא את $f(t)$ ולהציב, ניתן להיעזר בנוסחאות הבאות:

$$f(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$$

$$f(\infty)=\lim_{s\to 0} s\cdot F(s)$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

- קונוולציה:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$\boxed{L\left(f(t)*g(t)\right)=F(s)\cdot G(s)}$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=\int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

$$L^{-1}\left(F(s)\cdot G(s)\right)=f(t)*g(t)$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©