קוונטים 1 מספר קורס 03212103

פרק 8 - הרחבה על תנז מסילתי ספין ותנז כולל

תוכן העניינים

תנ"ז מסילתי והספין:

סיכום כללי:

יחסי החילוף של התנ"ז המסילתי:

$$\left[\hat{L}_x,\hat{L}_y\right]=i\hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_y,\hat{L}_z\right]=i\hbar\hat{L}_x$$
$$\left[\hat{L}_z,\hat{L}_x\right]=i\hbar\hat{L}_y$$
$$\left[\hat{L}^2,\hat{L}_z\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_y\right]=\left[\hat{L}^2,\hat{L}_x\right]=0$$

התנ"ז בקואורדינטות כדוריות:

$$\hat{L}_z=(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial\varphi}$$
$$\hat{L}_x=-i\hbar\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$\hat{L}_y=-i\hbar\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$\hat{L}^2=-\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

הפונקציות העצמיות של $\hat{L}_z$ ו- $\hat{L}^2$ הן הספריות ההרמוניות: $Y_l^m(\theta,\varphi)$.

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\phi(\varphi)=\varepsilon\sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$$

$$\varepsilon=\begin{cases}(-1)^m & m>0\\ 1 & m\geq 0\end{cases}\qquad -l\leq m\leq l$$

m,l שלמים

$$\hat{L}_z Y_l^m = \hbar m Y_l^m$$
$$\hat{L}^2 Y_l^m = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m$$
$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$$
$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar\hat{L}_z$$
$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z$$
$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$$
$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm\right] = 0$$

מטריצות התנ"ז עבור $l=1$:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{L}^2 = \hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ספין :
התנ"ז של הספין מקיים את אותם יחסי חילוף כמו התנ"ז המסילתי :

$$\left[\hat{S}_x, \hat{S}_y\right] = i\hbar\hat{S}_z$$
$$\left[\hat{S}_y, \hat{S}_z\right] = i\hbar\hat{S}_x$$
$$\left[\hat{S}_z, \hat{S}_x\right] = i\hbar\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_z f = \hbar m_s f$$
$$\hat{S}^2 f = \hbar^2 S(S+1) f$$
$$-S \le m_s \le S$$

קפיצות של 1

S, m_s יכולים להיות חצי שלמים.
S תלוי רק בסוג החלקיק.
פרמיונים – ספין חצי שלם.
בוזונים – ספין שלם.

ספין חצי:
מצבים אורתונורמאלים:

$$S = \frac{1}{2} \qquad m_s = \pm\frac{1}{2}$$

$$|x_+\rangle = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\uparrow\rangle$$

$$|x_-\rangle = \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)}\,|s, m_s \pm 1\rangle$$

פונקציית מצב כללית של הספין:

$$|x\rangle = \alpha|x_+\rangle + \beta|x_-\rangle$$

שאלות:

1) אלקטרון במצב אפ נמדד באיקס

מודדים את ערך הספין בכיוון z של אלקטרון ומקבלים כי האלקטרון במצב up.
מייד לאחר מכן מודדים את הספין שלו בכיוון x.

א. מצאו את הע"ע והו"ע של $\hat{S}_x$.

ב. מהי ההסתברות לקבל $\frac{\hbar}{2}$ ומהי ההסתברות לקבל $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת $\hat{S}_x$?

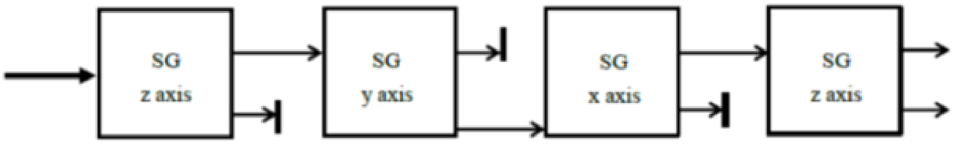
ג. חשבו את התוחלת במדידת $\hat{S}_x$.

במדידת $\hat{S}_x$ התקבלה התוצאה $\frac{\hbar}{2}$. מיד לאחר מכן מדדו שוב את $\hat{S}_z$.

ד. מה ההסתברות למדידת $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת ה- $\hat{S}_z$?

2) קרן אלק דרך מכונות שטרן-גרלך

מעבירים קרן של אלקטרונים דרך הסדרה הבאה של מכונות (ניסויי
שטרן-גרלך (הקרן נעה משמאל לימין).



נתון שבכל מכונות (ניסויי) שטרן-גרלך האלקטרונים עם היטל הספין החיובי על
הציר שמצוין על המכונה נמצאים בקרן העליונה שיוצאת מהמכונה
והאלקטרונים עם היטל הספין השלילי על הציר שמצוין על המכונה נמצאים
בקרן התחתונה שיוצאת מהמכונה.

בהינתן שמצב האלקטרונים בקרן המקורית הוא: $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\uparrow\rangle$

בבסיס $\hat{S}_z$.

מצאו את אחוז האלקטרונים מהקרן המקורית שנמצאים בקרן התחתונה
שיוצאת ממכונת שטרן-גרלך האחרונה (הימנית ביותר) בסדרה.

תשובות סופיות:

1) א.
$$\lambda_1=\frac{\hbar}{2}\qquad v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$
$$\lambda_2=-\frac{\hbar}{2}\qquad v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$$

ב. $p\left(\frac{\hbar}{2}\right)=p\left(-\frac{\hbar}{2}\right)=\frac{1}{2}$

ג. 0

ד. $\frac{1}{2}$

2) א. $\frac{1}{12}$

המילטוניאן פריק:

סיכום כללי:

המילטוניאון פריק הוא המילטוניאן מהצורה הבאה:

$$\hat{H}\left(\hat{X},\hat{P},\hat{S}\right)=\hat{H}_0\left(\hat{X},\hat{P}\right)+\hat{H}_S\left(\hat{S}\right)$$

במקרה של המילטוניאן פריק ניתן לפתור את משוואת שרידינגר לספין ולמרחב בנפרד.

נקיפת לרמור:

סיכום כללי:

ערך התוחלת של S עבור ספין חצי בשדה מגנטי עושה נקיפה (פרסציה) מסביב לשדה בתדירות: $\omega=\gamma B_0$ ובזווית α ביחס לשדה כאשר: $\gamma=g\frac{-e}{2m_e}$.

g הוא היחס הגיירו מגנטי.
α נקבעת מתנאי התחלה.
פונקציית הגל תהיה:

$$x(t)=\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{\frac{\gamma B_0}{2}t},\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{-\frac{\gamma B_0}{2}t}\right)$$

חיבור תנ"ז:

סיכום כללי:

חיבור שני ספינים:

$$|S_1 - S_2| \le S < S_1 + S_2$$

S הוא של כל המערכת והוא לא קבוע בניגוד לחלקיק בודד:

$$-S \le m_S \le S$$

עבור שני חלקיקים עם ספין חצי:

טריפלט -

$$\begin{aligned}
&|S, m_S\rangle \\
&|1,1\rangle \to |\uparrow\uparrow\rangle \\
&|1,0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \\
&|1,-1\rangle \to |\downarrow\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

סינגלט -

$$|0,0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

תנ"ז כולל:

$$\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$$

אותם יחסי חילוף כמו של התנ"ז המסילתי והספין:

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_z f = \hbar m_j f \\
&\hat{J}^2 f = \hbar^2 j(j+1) f \\
&m_j = m_l + m_s \\
&|l - S| \le j \le l + S
\end{aligned}$$

שאלות:

1) **חישוב מפורש של S**

חשבו מפורשות את S עבור מצבי הטריפלט ומצב הסינגלט.

רמז: $\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 = \hat{S}_{1x} \cdot \hat{S}_{2x} + \hat{S}_{1y} \cdot \hat{S}_{2y} + \hat{S}_{1z} \cdot \hat{S}_{2z}$ והשתמשו במטריצות של $\hat{S}_i$ כדי לחשב את הפעולות על המצבים העצמיים של $\hat{S}_z$.

תשובות סופיות:

1) הוכחה.

אינטראקציית ספין מסלול:

סיכום כללי:

$$U=-\vec{\mu}\cdot\vec{B}=\frac{e^2\cdot\vec{S}\cdot\vec{L}}{8\pi\varepsilon_0 m_e^2 c^2 r^3}$$

$$\vec{B}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{m_e c^2 r^3}\vec{L}$$

ע״ע של $\hat{\vec{S}}\cdot\hat{\vec{L}}$:

$$\frac{1}{2}\hbar^2\left(j\left(j+1\right)-S\left(S+1\right)-l\left(l+1\right)\right)$$