

תורת הקוונטים 96032

פרק 7 - הרחבה על תנז מסילתי וספין

תוכן העניינים

1. תנז מסילתי והספין.....1

תנ"ז מסילתי והספין:

סיכום כללי:

יחסי החילוף של התנ"ז המסילתי:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y \\ [\hat{L}^2, \hat{L}_z] &= [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_x] = 0 \end{aligned}$$

התנ"ז בקואורדינטות כדוריות:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z &= (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \hat{L}_x &= -i\hbar \left(-\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ \hat{L}^2 &= -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \end{aligned}$$

הפונקציות העצמיות של $\hat{L}_z$ ו- $\hat{L}^2$ הן הספריות ההרמוניות: $Y_l^m(\theta, \varphi)$.

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \theta(\theta) \phi(\varphi) = \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m & m > 0 \\ 1 & m \geq 0 \end{cases} \quad -l \leq m \leq l$$

m, l שלמים

$$\begin{aligned}
 \hat{L}_z Y_l^m &= \hbar m Y_l^m \\
 \hat{L}^2 Y_l^m &= \hbar^2 l(l+1) Y_l^m \\
 \hat{L}_{\pm} &= \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \\
 \hat{L}_+ \hat{L}_- &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hbar \hat{L}_z \\
 \hat{L}_- \hat{L}_+ &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 - \hbar \hat{L}_z \\
 [\hat{L}_+, \hat{L}_-] &= 2\hbar \hat{L}_z \\
 [\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] &= \pm \hbar \hat{L}_{\pm} \\
 [\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}] &= 0
 \end{aligned}$$

מטריצות התנ"ז עבור $l=1$:

$$\begin{aligned}
 \hat{L}_x &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{L}_y &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\
 \hat{L}^2 &= \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ספין :

התנ"ז של הספין מקיים את אותם יחסי חילוף כמו התנ"ז המסילתי :

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= i\hbar \hat{S}_z \\
 [\hat{S}_y, \hat{S}_z] &= i\hbar \hat{S}_x \\
 [\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= i\hbar \hat{S}_y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{S}_z f &= \hbar m_s f \\
 \hat{S}^2 f &= \hbar^2 S(S+1) f \\
 -S &\leq m_s \leq S
 \end{aligned}$$

קפיצות של 1

S, m_s יכולים להיות חצי שלמים.

S תלוי רק בסוג החלקיק.

פרמיונים – ספין חצי שלם.

בוזונים – ספין שלם.

ספין חצי :

מצבים אורתונורמאליים :

$$S = \frac{1}{2} \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$$|x_+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\uparrow\rangle$$

$$|x_-\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\downarrow\rangle$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$$

$$\hat{S}_\pm |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$$

פונקציית מצב כללית של הספין :

$$|x\rangle = \alpha |x_+\rangle + \beta |x_-\rangle$$

שאלות:

(1) אלקטרון במצב אפ נמדד באיקס

מודדים את ערך הספין בכיוון z של אלקטרון ומקבלים כי האלקטרון במצב up. מיד לאחר מכן מודדים את הספין שלו בכיוון x .

א. מצאו את העי"ע והו"ע של $\hat{S}_x$.

ב. מהי ההסתברות לקבל $\frac{\hbar}{2}$ ומהי ההסתברות לקבל $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת $\hat{S}_x$?

ג. חשבו את התוחלת במדידת $\hat{S}_x$.

במדידת $\hat{S}_x$ התקבלה התוצאה $\frac{\hbar}{2}$. מיד לאחר מכן מדדו שוב את $\hat{S}_z$.

ד. מה ההסתברות למדידת $-\frac{\hbar}{2}$ במדידת $\hat{S}_z$?

(2) קרן אלק דרך מכונות שטרן-גרלך

מעבירים קרן של אלקטרונים דרך הסדרה הבאה של מכונות (ניסויי) שטרן-גרלך (הקרן נעה משמאל לימין).



נתון שבכל מכונות (ניסויי) שטרן-גרלך האלקטרונים עם היטל הספין החיובי על הציר שמצוין על המכונה נמצאים בקרן העליונה שיוצאת מהמכונה והאלקטרונים עם היטל הספין השלילי על הציר שמצוין על המכונה נמצאים בקרן התחתונה שיוצאת מהמכונה.

בהינתן שמצב האלקטרונים בקרן המקורית הוא: $|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\uparrow\rangle$ בבסיס $\hat{S}_z$.

מצאו את אחוז האלקטרונים מהקרן המקורית שנמצאים בקרן התחתונה שיוצאת ממכונת שטרן-גרלך האחרונה (הימנית ביותר) בסדרה.

תשובות סופיות:

$$\begin{aligned}
 & \lambda_1 = \frac{\hbar}{2} \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) \\
 & \lambda_2 = -\frac{\hbar}{2} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \\
 & \text{א. (1)} \\
 & \text{ב. } p\left(\frac{\hbar}{2}\right) = p\left(-\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2} \\
 & \text{ג. 0} \quad \text{ד. } \frac{1}{2} \\
 & \text{א. (2)} \quad \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$