

חדוא א 9001100

פרק 10 - הפונקציה הממשית ומבוא לתורת הקבוצות

תוכן העניינים

1. הפונקציה ההפוכה 1
2. תרגילים משולבים 5
3. מבוא לתורת הקבוצות 9

הפונקציה ההפוכה

שאלות

בשאלות 1-4 הוכיחו שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצאו את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \qquad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

$$(x \geq 0) f(x) = x^2 - 4 \quad (4) \qquad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3)$$

בשאלות 5-7, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע. בנוסף, מצאו את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (7) \qquad f(x) = x^2 - x \quad (6) \qquad f(x) = x + \frac{1}{x} \quad (5)$$

בשאלות 8-10, בדקו האם הפונקציה היא חח"ע, אם כן, מצאו את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad (10) \qquad y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad (9) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (8)$$

$$(11) \text{ נתונה } f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$$

האם הפונקציה היא חח"ע? מצאו את התמונה של הפונקציה.

(12) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את תחום ההגדרה, הטווח והתמונה וקבעו האם היא פונקציה על:

א. $f(x) = \frac{x-1}{3}$; $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ב. $f(x) = \frac{x+1}{x}$; $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

ג. $f(x) = \frac{3x-2}{x-2}$; $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}$

ד. $f(x) = x^2 - 4$; $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

13 עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו תחום הגדרה, טווח ותמונה. בנוסף, קבעו האם הפונקציה הנתונה היא על.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{א.}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow (0,1] \quad \text{ב.}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f: (1, \infty) \rightarrow (0,1] \quad \text{ג.}$$

14 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם f ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ב. אם f ו- g חח"ע אז h על.

ג. אם f ו- g על אז h על.

ד. אם f ו- g על אז h חח"ע.

ה. אם f חח"ע ו- g על אז h חח"ע.

ו. אם f חח"ע ו- g על אז h על.

ז. אם f על ו- g חח"ע אז h חח"ע.

ח. אם f על ו- g חח"ע אז h על.

15 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h על.

הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. g על.

16 תהיינה שתי פונקציות $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$.

תהי $h: A \rightarrow C$ ההרכבה, המוגדרת על ידי $h(x) = g(f(x))$.

נתון כי h חח"ע.

הוכיחו או הפריכו:

א. g על.

ב. f על.

ג. g חח"ע.

ד. f חח"ע.

תשובות סופיות

- (1) $f^{-1}(x) = 3x + 1$, כל y .
- (2) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$, $y \neq 1$.
- (3) $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$, $y \neq 3$.
- (4) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$, $y \geq -4$.
- (5) לא חח"ע. תמונה: $y \leq -2$ או $y \geq 2$.
- (6) לא חח"ע. תמונה: $y \geq -\frac{1}{4}$.
- (7) לא חח"ע. תמונה $0 \leq y \leq 1$.
- (8) כן חח"ע. תמונה: $y > 0$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x > 0$.
- (9) לא חח"ע. תמונה: $y \geq 2.3$ או $y \leq -1.3$.
- (10) כן חח"ע. תמונה: $y \neq 1$. פונקציה הפוכה: $f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2}$.
- (11) לא חח"ע. תמונה: $y \geq \frac{6}{\sqrt{3}}$.
- (12) א. תחום הגדרה, טווח ותמונה: \mathbb{R} ; על.
 ב. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; לא על.
 ג. תחום הגדרה $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, טווח ותמונה: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; על.
 ד. תחום הגדרה $[0, \infty)$, טווח \mathbb{R} , תמונה: $[-4, \infty)$; לא על.
- (13) א. תחום הגדרה וטווח: \mathbb{R} , תמונה: $(0, 1]$; לא על.
 ב. תחום הגדרה \mathbb{R} , טווח ותמונה: $(0, 1]$; על.
 ג. תחום הגדרה $(1, \infty]$, טווח $(0, 1]$, תמונה: $(0, 0.5)$; לא על.
- (14) שאלת הוכחה.
- (15) שאלת הוכחה.
- (16) שאלת הוכחה.

תרגילים משולבים

שאלות

$$(1) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 1 \\ x^3 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

שרטטו את הפונקציה, וקבעו האם היא:

א. עולה.

ב. יורדת.

ג. אי-זוגית.

ד. זוגית.

ה. חסומה.

ו. לא חסומה.

ז. חח"ע.

ח. על \mathbb{R} .

הערה: ניתן להתבסס על הציור כנימוק.

$$(2) \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & x > 1 \\ x^5 + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x+1 & x < -1 \end{cases}$$

בכל אחד מהסעיפים הבאים יש טענה.

קבעו האם הטענה נכונה או לא נכונה.

א. הפונקציה מונוטונית עולה ממש.

ב. הפונקציה על \mathbb{R} .

ג. הפונקציה אי-זוגית.

ד. הפונקציה זוגית.

ה. הפונקציה חח"ע.

הערה: ניתן לשרטט ולהתבסס על הציור כנימוק.

(3) נתונה פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, זוגית ומונוטונית עולה ממש, ופונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, אי-זוגית ומונוטונית יורדת ממש.

$$\text{נסמן: } z(x) = -g(x^3) \text{ ו- } k(x) = -f(x^3).$$

טענה א': $k(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ב': $z(x)$ מונוטונית עולה ממש.

טענה ג': $h(x) = k(x)z(x)$ זוגית.

מי מבין הטענות נכונה?

(4) נתונות שתי פונקציות, $f, g: [0,1] \rightarrow [0,1]$.

נתון ש- f מונוטונית עולה ממש, ואילו g מונוטונית יורדת חלש,

אך אינה יורדת ממש.

$$\text{תהי } h(x) = f(g(x)).$$

איזו טענה נכונה?

א. h יורדת חלש.

ב. h עולה ממש.

ג. h עולה חלש, אך אינה עולה ממש.

ד. h אינה חסומה בהכרח.

$$(5) \text{ נתונות הפונקציות } f(x) = \begin{cases} x+4 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \text{ ו- } g(x) = \begin{cases} x^2-4 & x < 0 \\ -x^2-2x-1 & x \geq 0 \end{cases}$$

תהי $h(x) = f(g(x))$.

א. מצאו את h בקטע $[-2,0)$.

ב. קבעו האם h חחי"ע בקטע $[-2,0)$.

ג. קבעו האם h חסומה בקטע $[-2,0)$.

ד. קבעו האם $h: [-2,0) \rightarrow [0,4]$ היא על.

* בסעיפים ב-ד ניתן להסתמך על גרף הפונקציה.

(6) נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.

קבעו מי מבין הטענות הבאות נכונה.

הפונקציה $h(x) = f(g(x))$ היא:

א. חסומה.

ב. אי-זוגית.

ג. חחי"ע.

ד. מונוטונית.

7 נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} : $f(x) = x^3$, $g(x) = -\lfloor x \rfloor$.

א. בדקו את מונוטוניות $z(x) = f(g(x))$.

ב. בדקו את מונוטוניות $k(x) = g(f(x))$.

ג. בדקו האם $h(x) = \sqrt[3]{f(x)} - g(-x)$ חסומה.

תזכורת לסעיפים א+ב:

אם $a < b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ אז הפונקציה f יורדת חלש.

8 נתונות פונקציות המוגדרות על כל \mathbb{R} :
 $f(x) = (3\lfloor x \rfloor)^3 + 27\lfloor x \rfloor$
 $g(x) = f(x) + x^3 - 28$

הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה f עולה ממש וחח"ע.

ב. הפונקציה g עולה ממש וחח"ע.

9 מצאו את הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$,

קבעו את תחום הגדרתה והוכיחו שהפונקציה על \mathbb{R} .
 הערה: פונקציה זו נקראת סינוס היפרבולי.

10 חקרו את מונוטוניות הפונקציה $f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$.

הערה: אין להשתמש בנגזרות.

11 נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה.

ג. הוכיחו שהפונקציה חסומה.

ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

תשובות סופיות

- (1) א. כן. ב. לא. ג. לא. ד. לא. ה. לא. ו. כן.
ז. כן. ח. כן.
- (2) אף טענה אינה נכונה.
- (3) טענה ב' נכונה.
- (4) טענה א' נכונה.
- (5) א. $h(x) = x^2$. ב. הפונקציה חח"ע בקטע.
- ג. הפונקציה חסומה בקטע. ד. הפונקציה לא על.
- (6) א. הפונקציה חסומה. ב. הפונקציה לא זוגית ולא אי זוגית.
ג. הפונקציה לא חח"ע. ד. הפונקציה לא מונוטונית.
- (7) א. הפונקציה $z(x)$ יורדת חלש. ב. הפונקציה $k(x)$ יורדת חלש.
ג. הפונקציה חסומה.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; תחום הגדרתה: כל x .
- (10) ראו באתר.
- (11) א. $-1 \leq x \leq 2$. ב. $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$. ג. שאלת הוכחה.
- ד. $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ עלייה, $\frac{1}{2} < x \leq 2$ ירידה.

מבוא לתורת הקבוצות

סיכום כללי

הגדרות יסודיות

- גרירה חד כיוונית \Rightarrow . $A \Rightarrow B$ פירושו: אם A מתקיים, אז גם B מתקיים.
- גרירה דו-כיוונית \Leftrightarrow (אם ורק אם). $A \Leftrightarrow B$ פירושו: $A \Rightarrow B$ וגם $B \Rightarrow A$.
- הסימן 'או' \vee .
- הסימן 'וגם' \wedge .

קבוצה, איבר של קבוצה ושייכות לקבוצה

- קבוצה היא אוסף של עצמים.
- כל עצם בקבוצה נקרא איבר של הקבוצה.
- שייכות לקבוצה:
 - על מנת לציין שהאיבר a שייך לקבוצה A נרשום $a \in A$.
 - על מנת לציין שהאיבר a אינו שייך לקבוצה A נרשום $a \notin A$.

שוויון בין קבוצות

- שתי קבוצות הן שוות אם יש להן בדיוק את אותם איברים.
- פורמלית שוויון בין קבוצות מוגדר באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

הקבוצה ריקה

קבוצה שאין בה כלל איברים נקראת הקבוצה הריקה ומסומנת ב- \emptyset , כלומר $\emptyset = \{ \}$.

קבוצה סופית ואינסופית

- קבוצה תקרא סופית אם מספר האיברים בה סופי.
- קבוצה תקרא אינסופית אם מספר האיברים בה אינסופי.

עוצמה של קבוצה

מספר האיברים של קבוצה A נקרא גם העוצמה של הקבוצה ומסומן $|A|$.

תת-קבוצה

אם קבוצה A מוכלת בקבוצה B , נסמן $A \subseteq B$.

תמיד מתקיים:

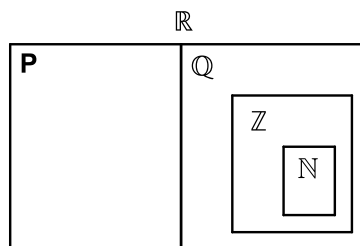
- $A \subseteq A$

- $\emptyset \subseteq A$

עבור שוויון קבוצות נדרוש $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ או $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

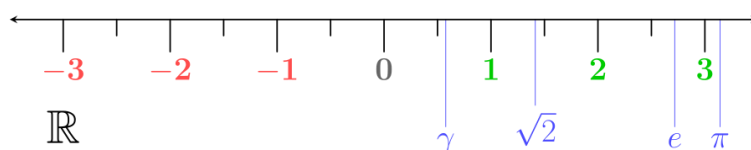
קבוצות מספרים מיוחדות

- קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots\}$
- קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$
- קבוצת המספרים האי-רציונאליים (אין סימון ספציפי לקבוצה זו, למעט \mathbb{P}).
- קבוצת המספרים הממשיים: \mathbb{R} (כוללת את \mathbb{Q} ואת \mathbb{P}).



ציר המספרים

את קבוצת כל המספרים הממשיים ניתן לתאר על ידי הישר הממשי שהוא הישר שנקודותיו הן המספרים הממשיים:



קטעים על ציר המספרים

סימון קטעים	סימון קבוצות	תיאור מילולי
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	הקטע הפתוח מ- a ל- b לא כולל נקודות הקצה
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	הקטע הסגור מ- a ל- b וכולל נקודות קצה
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את a ולא את b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	קטע חצי סגור וחצי פתוח, מכיל את b ולא את a
(a, ∞)	$\{x \mid a < x < \infty\}$	הקרו הפתוחה מ- a עד ∞ ללא a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x < \infty\}$	הקרו הסגורה מ- a עד ∞ כולל a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	הקרו הפתוחה מ- $-\infty$ עד b ללא b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leq b\}$	הקרו הסגורה מ- $-\infty$ עד b כולל b

קבוצת החזקה של קבוצה נתונה

קבוצת כל תתי-הקבוצות של A , נקראת קבוצת החזקה של A , ומסומנת $P(A)$.

איחוד וחיתוך קבוצות

- איחוד קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את כל האיברים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cup B$.
- חיתוך קבוצות A ו- B פירושו הגדרת קבוצה חדשה שמכילה את האיברים המשותפים של הקבוצות עצמן ומסומנת $A \cap B$.

תכונות החיתוך	תכונות האיחוד
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
	$A \subseteq A \cup B$

הדיסטריבוטיביות של החיתוך מעל האיחוד ושל האיחוד מעל החיתוך:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

הפרש קבוצות

ההפרש של שתי קבוצות A ו- B , המסומן $A - B$, הוא קבוצה שאיבריה הם כל איברי A שאינם איברי B , כלומר $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

משלים של קבוצה

ההפרש $U - A$ מסומן ב- A^c או ב- A' ונקרא **המשלים** של A , כאשר U היא הקבוצה האוניברסלית.

כללי דה-מורגן

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \bullet$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \bullet$$

דיאגרמת וון

תיאור גרפי של קבוצות והיחסים ביניהן.

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y: (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y: (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \exists z: xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\forall n \exists k, n^3 - n = 6k$ ($n-1$ ו- k טבעיים).

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרון אי-השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6.

ד. עבור כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים,

ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדירו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישומן

בצורה: $A = \{x \mid x \text{ מקיים תכונה מסוימת}\}$.

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האי-זוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שוות זו לזו:

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$.

מי מבין הטענות הבאות נכונה:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------|----------------------------|
| א. $5 \in A$ | ב. $2 \in A$ | ג. $\{2\} \in A$ |
| ד. $\{2\} \subseteq A$ | ה. $\{\{2\}\} \subseteq A$ | ו. $\emptyset \in A$ |
| ז. $\emptyset \subseteq A$ | ח. $\{2, \{2\}\} \subseteq A$ | ט. $\{2, 4\} \subseteq A$ |
| י. $\{2, 4\} \in A$ | יא. $\{\{2, 4\}\} \in A$ | יב. $\{2, 5\} \subseteq A$ |
| יג. $\{2, 5\} \in A$ | יד. $\{1, 4\} \in A$ | |

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיימות:

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות:

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}, E = \{7, 8\}$$

קבעו איזה מבין הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \subseteq A$ וגם $X \not\subseteq D$.

ב. $X \subseteq D$ וגם $X \not\subseteq C$.

ג. $X \subseteq E$ וגם $X \not\subseteq A$.

9) הוכיחו: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

10 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

11 נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4), B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$ ב. $A \cap B$ ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$ ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

12 נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$.

ב. חשבו את $A - (B - C)$.

13 נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$, $A = \{12, 15, 18\}$, $B = \{13, 15, 17\}$

הדגימו את כלל דה מורגן $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

14 הוכיחו את כלל דה מורגן הראשון $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

15 מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- \mathbb{R} , של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16 הציגו באמצעות דיאגרמת וון את הקבוצות הבאות :

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| א. $A \cap B$ | ב. $A \cup B$ |
| ג. A^c | ד. $A \cap B^c$ |
| ה. $A^c \cap B$ | ו. $A \cup B^c$ |
| ז. $A^c \cup B$ | ח. $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ |
| ט. $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ | |

17 ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
הוכיחו כי $X = Y$.
- ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
הוכיחו כי $X = Y$.

18 תהיינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

- טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$.
- טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$.
- טענה ג': $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \setminus Z$.
- איזו טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19 נתונה הקבוצה $A = \{\emptyset, 4, \{4\}\}$.

רשמו את $P(A)$.

20 הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית :

- א. לכל קבוצה A מתקיים $A \subseteq P(A)$.
- ב. לכל קבוצה A מתקיים $A \not\subseteq P(A)$.

21 הוכיחו כי: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$.

תשובות סופיות

- (1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ב. לכל x קיים y , כך ש- $(x+y)^2 > 0$. הטענה אינה נכונה.
 ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $xz = \frac{y}{4}$. הטענה אינה נכונה.
 ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. הטענה נכונה.
 ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענה נכונה.
- (2) א. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $\forall x: x^2 + 4 > 0$
 ג. $\forall n \exists k: n^3 - n = 6k$ ד. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$
- (3) א. $A = (-4, 4)$, בקבוצה אינסוף איברים.
 ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצה 7 איברים.
 ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצה 3 איברים.
 ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצה 4 איברים.
 ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצה 2 איברים.
 ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, בקבוצה 9 איברים.
- (4) א. $A = \{x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ ב. $B = \{11, 13, 17, 19\}$
 ג. $C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ד. $D = \{1, 4, 9, 16\}$
- (5) הקבוצות A, B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.
- (6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.
 ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.
 יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.
- (7) $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1, 2\}, 1, 2\}$
- (8) א. A, C ב. E, D ג. לא קיימת קבוצה כזאת.
- (9) שאלת הוכחה.

$$A \cap B = \{4, 6, 8\} \quad \text{ב.} \quad A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad \text{א. (10)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\} \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\} \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\} \quad \text{ה.}$$

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{ב.} \quad A \cup B = (-2, 4) \quad \text{א. (11)}$$

$$(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1) \quad \text{ד.} \quad (A \cup B) \cap C = (0, 4) \quad \text{ג.}$$

$$(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1) \quad \text{ה.}$$

$$\{4, 5, 6\} \quad \text{ב.} \quad \emptyset \quad \text{א. (12)}$$

(13) ללא פתרון.

(14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א. (15)}$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

(16) ראו סרטון.

(17) שאלת הוכחה.

(18) טענה ב.

$$P(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{4\}, \{\{4\}\}, \{\emptyset, 4\}, \{4, \{4\}\}, \{\emptyset, \{4\}\}, \{\emptyset, 4, \{4\}\}\} \quad \text{(19)}$$

(20) שאלת הוכחה.

(21) שאלת הוכחה.