אלגברה 1

פרק 5 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות 1
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות 3
3. העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם 6
4. פעולות עם העתקות ליניאריות 10

העתקות ליניאריות

שאלות

בשאלות **1-15**, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

1 $T(x,y)=(x+y,x-y)\;;\quad T:R^2\to R^2$

2 $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\;;\quad T:R^3\to R^3$

3 $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\;;\quad T:R^3\to R^2$

4 $T(x,y)=(xy,y,z)\;;\quad T:R^2\to R^3$

5 $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\;;\quad T:R^3\to R^3$

6 $T(A)=BA+AB\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]\quad (B\in M_n[R])$

7 $T(A)=A+A^T\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

8 $T(A)=|A|\cdot I\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

9 $T(A)=A\cdot A^T\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

10 $T(A)=A^{-1}\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

11 $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2\;;\quad T:P_3[R]\to P_2[R]$

12 $T\left(p(x)\right)=p(x+1)\;;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

13 $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)\;;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

14 $T\left(p(x)\right)=p^2(x)\;;\quad T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$

15 $T(z)=\bar{z}\;;\quad T:C[F]\to C[F]\quad (F=C,F=R)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T:R^2\to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

17) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9)$, $T(0,1,1)=(4,5,6)$, $T(1,1,0)=(1,2,3)$.

18) $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)$, $T(0,1,1)=(1,2,1)$, $T(1,0,1)=(1,1,0)$.

19) $T:R^4\to R^3$ כך ש-
$T(1,2,-1,0)=(0,1,-1), T(-1,0,1,1)=(1,0,0), T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

20) $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4, T\left(4x+x^2\right)=x, T\left(1-x\right)=x^2+1$.

21) נתונה העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$, המקיימת:
$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$
$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$.
$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n\to R^m$.

22) נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

1) כן	**2)** כן	**3)** לא	**4)** לא	**5)** לא
6) כן	**7)** כן	**8)** לא	**9)** לא	**10)** לא
11) כן	**12)** כן	**13)** כן	**14)** לא	**15)** לא
16) כן	**17)** כן	**18)** כן	**19)** כן	**20)** כן

21) שאלת הוכחה. **22)** שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרעין ותמונה של העתקות לינאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

1) $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$, $T:R^4\to R^3$

2) $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$, $T:R^3\to R^4$

3) $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$, $T:R^4\to R^3$

4) $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$, $T:M_2[R]\to M_2[R]$

5) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$, $T:P_2[R]\to P_2[R]$

6) $D\left(p(x)\right)=p'(x)$, $D:P_3[R]\to P_3[R]$

7) מצאו העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

8) מצאו העתקה לינארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$.

9) הוכיחו כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של V זוגי.

10) הוכיחו או הפריכו:

א. קיימת העתקה לינארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קיימת העתקה לינארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim\left(W\right)=4$, $\dim\operatorname{Im}\left(T\right)=\dim\operatorname{Ker}\left(T\right)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

12) הוכיחו או הפריכו:

א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}\left(T^2\right)\subseteq\operatorname{Im}\left(T\right)$.

ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Im}\left(T\right)=\operatorname{Im}\left(T^2\right)$, $\operatorname{Ker}\left(T\right)=\operatorname{Ker}\left(T^2\right)$
מתקיים $T=T^2$.

ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}\left(T\right)\subseteq\operatorname{Ker}\left(T\right)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

13) מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$; $S(y)=A^Ty$.
הראו כי $\operatorname{Im}\left(T\right)=\left(\operatorname{Ker}\left(S\right)\right)^{\perp}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

2) גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

3) גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

4) גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

5) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1 \quad , \quad p(x)=2x+5\}$, מימד: 2.

6) גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1, \quad p(x)=x, \quad p(x)=x^2\}$, מימד: 3.

7) $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

8) $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

9) שאלת הוכחה.

10) לא.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבעו האם היא חח"ע,[1] האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

1) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3\to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R]\to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R]\to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

5) האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

6) נתונה העתקה לינארית $T:U\to V$.
הוכיחו:

א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז T לא על.

ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז T לא חח"ע.

ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow$ T על.

7) נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.

ב. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.

ג. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.

ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V.
הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.

ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

9) נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- W.

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- W, אז T חח"ע.

10) נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם T היא איזומורפיזם אז $m=n$.

ב. אם $m>n$, אז T חח"ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל v, אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

11) נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם T על, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ג. T היא איזומורפיזם.

ד. T היא העתקת האפס.

12) נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v\in\mathrm{Ker}(T)$, אז $v\in\mathrm{rowsp}(A)$.

ב. אם $v\in\mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Ker}(T)$.

ג. אם $v\in\mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Im}(T)$.

ד. אם $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

13) נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, ונתונה מטריצה A, כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A)=n$, אז T חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A)=n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{Im}(T)\subseteq\text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{rank}(A)\le\frac{n}{2}$.

14) נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R]\to R$.

15) נתונה העתקה לינארית $T:M_n[R]\to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של T.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix}b+c-d & -a+b+c-d\\ b-d & d\end{pmatrix}$$

5) לא.

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) א. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,...,-1+x^n\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח"ע, כן על.

15) א. $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\right\},\ \operatorname{Im}(T)=M_n[R]$

ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פעולות עם העתקות לינאריות

שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$, $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** TS **5)** ST

6) T^2 **7)** T^{-1} **8)** T^{-2} **9)** S^2

תשובות סופיות

1) לא ניתן להגדיר.

2) $4S=4(x-z,y)$

3) לא ניתן להגדיר.

4) לא ניתן להגדיר.

5) $ST:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

6) $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

7) $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

8) $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

9) לא ניתן להגדיר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©