# אלגברה לינארית 2 (מענה חלקי)

## פרק 3 - העתקות ליניאריות

### תוכן העניינים


1. העתקות ליניאריות ..... 1
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות ..... 3
3. העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם ..... 6
4. פעולות עם העתקות ליניאריות ..... 10

# העתקות ליניאריות

## שאלות

בשאלות **1-15**, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

**1** $T(x,y)=(x+y,x-y)\;;\quad T:R^2\to R^2$

**2** $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)\;;\quad T:R^3\to R^3$

**3** $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)\;;\quad T:R^3\to R^2$

**4** $T(x,y)=(xy,y,z)\;;\quad T:R^2\to R^3$

**5** $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)\;;\quad T:R^3\to R^3$

**6** $T(A)=BA+AB\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]\quad (B\in M_n[R])$

**7** $T(A)=A+A^T\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**8** $T(A)=|A|\cdot I\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**9** $T(A)=A\cdot A^T\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**10** $T(A)=A^{-1}\;;\quad T:M_n[R]\to M_n[R]$

**11** $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2\;;\quad T:P_3[R]\to P_2[R]$

**12** $T\left(p(x)\right)=p(x+1)\;;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

**13** $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)\;;\quad T:P_n[R]\to P_n[R]$

**14** $T\left(p(x)\right)=p^2(x)\;;\quad T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$

**15** $T(z)=\bar{z}\;;\quad T:C[F]\to C[F]\quad (F=C,F=R)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**16)** עבור איזה ערך של הקבוע $m$ (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה לינארית:
$T:R^2\to R^2 \quad ; \quad T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)$ ?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון.
אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

**17)** $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(7,8,9),\ T(0,1,1)=(4,5,6),\ T(1,1,0)=(1,2,3)$.

**18)** $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(0,0,1)=(0,1,1)\ ,\ T(0,1,1)=(1,2,1),\ T(1,0,1)=(1,1,0)$.

**19)** $T:R^4\to R^3$ כך ש-
$T(1,2,-1,0)=(0,1,-1),T(-1,0,1,1)=(1,0,0),T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

**20)** $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4,T\left(4x+x^2\right)=x,T\left(1-x\right)=x^2+1$.

**21)** נתונה העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$, המקיימת:
$T(1,0,0)=(a_1,a_2,a_3)$
$T(0,1,0)=(b_1,b_2,b_3)$.
$T(0,0,1)=(c_1,c_2,c_3)$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T:R^n\to R^m$.

**22)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1,v_2,...,v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

## תשובות סופיות

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1)** כן | **2)** כן | **3)** לא | **4)** לא | **5)** לא |
| **6)** כן | **7)** כן | **8)** לא | **9)** לא | **10)** לא |
| **11)** כן | **12)** כן | **13)** כן | **14)** לא | **15)** לא |
| **16)** כן | **17)** כן | **18)** כן | **19)** כן | **20)** כן |

**21)** שאלת הוכחה. **22)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# גרעין ותמונה של העתקות לינאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-6**, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

**1)** $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)\ ,\ T:R^4\to R^3$

**2)** $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)\ ,\ T:R^3\to R^4$

**3)** $T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\ ,\ T:R^4\to R^3$

**4)** $T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A\ ,\ T:M_2[R]\to M_2[R]$

**5)** $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)\ ,\ T:P_2[R]\to P_2[R]$

**6)** $D\left(p(x)\right)=p'(x)\ ,\ D:P_3[R]\to P_3[R]$

**7)** מצאו העתקה לינארית $T:R^3\to R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

**8)** מצאו העתקה לינארית $T:R^4\to R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$.

**9)** הוכיחו כי אם $\dim\operatorname{Im}(T)=\dim\operatorname{Ker}(T)$ אז הממד של $V$ זוגי.

**10)** הוכיחו או הפריכו:

א. קיימת העתקה לינארית $T:R^5\to R^5$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.

ב. קיימת העתקה לינארית $T:R^4\to R^4$ שעבורה $\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Im}(T)$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** ידוע שהעתקה לינארית $T:V\to W$,
מקיימת: $\dim W=4$ , $\dim \operatorname{Im}(T)=\dim \operatorname{Ker}(T)$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של $V$?

א. 10
ב. 9
ג. 7
ד. 6
ה. כל התשובות לא נכונות.

**12)** הוכיחו או הפריכו:

א. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ מתקיים $\operatorname{Im}(T^2)\subseteq \operatorname{Im}(T)$.

ב. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$ שמקיימת:
$\operatorname{Ker}(T)=\operatorname{Ker}(T^2)$ , $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(T^2)$, מתקיים $T=T^2$.

ג. לכל העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\operatorname{Im}(T)\subseteq \operatorname{Ker}(T)$,
אז בהכרח $T\neq 0$.

**13)** מטריצה $A_{m\times n}$ מגדירה העתקה $T:R^n\to R^m$ ; $T(x)=Ax$,
ואילו $A^T_{n\times m}$ מגדירה העתקה $S:R^m\to R^n$ ; $S(y)=A^Ty$.
הראו כי $\operatorname{Im}(T)=\left(\operatorname{Ker}(S)\right)^{\perp}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** גרעין – בסיס: $\{(0,0,1,4)\}$, מימד: 1. תמונה – כל בסיס של $\mathbb{R}^3$, מימד: 3.

**2)** גרעין – בסיס: $\{(0,0,0)\}$, מימד: 0.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,0,1),(0,5,1,4),(0,0,-6,21)\}$, מימד: 3.

**3)** גרעין – בסיס: $\{(-7,3,0,1),(1,-2,1,0)\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\{(1,1,2),(0,1,2)\}$, מימד: 2.

**4)** גרעין – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

תמונה – בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right\}$, מימד: 2.

**5)** גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1 \quad , \quad p(x)=2x+5\}$, מימד: 2.

**6)** גרעין – בסיס: $\{p(x)=1\}$, מימד: 1.

תמונה – בסיס: $\{p(x)=1, \quad p(x)=x, \quad p(x)=x^2\}$, מימד: 3.

**7)** $T\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 4 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

**8)** $T(x,y,z,t)=(-x-y+z,-2x-y+t,0)$

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** לא.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

## שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות **1-4**, קבעו האם היא חח"ע,[1] האם היא על,
האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.
כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

**1)** $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

**2)** $T:R^3\to R^3$ , $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

**3)** $T:P_2[R]\to R^3$ , $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

**4)** $T:M_2[R]\to P_3[R]$ , $T\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

**5)** האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4\to R^3$?

**6)** נתונה העתקה לינארית $T:U\to V$.
הוכיחו:

א. אם $\dim(U)<\dim(V)$, אז $T$ לא על.

ב. אם $\dim(U)>\dim(V)$, אז $T$ לא חח"ע.

ג. אם $\dim(U)=\dim(V)$, אז $T$ חח"ע $\Leftrightarrow$ $T$ על.

**7)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)\neq 0$, אז ההעתקה $T$ אינה על.

ב. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\le\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.

ג. אם $\dim\operatorname{Ker}(T)=0$ ו-$\dim(V)\ge\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ היא על.

ד. אם $\dim(V)<\dim(W)$, אז ההעתקה $T$ חח"ע.

[1] הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**8)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$ ; $\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של $V$.
הוכח או הפרך:

א. אם $\dim(V)>\dim(W)$ ואם $T(v_1)=0$, אז ייתכן מקרה שבו $T$ חח"ע.

ב. אם $\dim(V)>\dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בת"ל.

**9)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to W$.
$\{v_1,v_2...,v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- $V$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$.

ב. אם הקבוצה $\{T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)\}$ בת"ל ב- $W$, אז $T$ חח"ע.

**10)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ היא איזומורפיזם אז $m=n$.

ב. אם $m>n$, אז $T$ חח"ע.

ג. אם $T(v)=Av$ לכל $v$, אז למטריצה $A$ יש $n$ שורות ו- $m$ עמודות.

**11)** נתונה העתקה לינארית $T:V\to V$, המקיימת $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Ker}(T)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $T$ על, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ב. אם $T$ חח"ע, אז בהכרח $V=\{0\}$.

ג. $T$ היא איזומורפיזם.

ד. $T$ היא העתקת האפס.

**12)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m\times n}$,
כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $v\in\mathrm{Ker}(T)$, אז $v\in\mathrm{rowsp}(A)$.

ב. אם $v\in\mathrm{rowsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Ker}(T)$.

ג. אם $v\in\mathrm{colsp}(A)$, אז $v\in\mathrm{Im}(T)$.

ד. אם $\mathrm{Ker}(T)=\{0\}$, אז $n<m$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** נתונה העתקה לינארית $T:R^n\to R^n$, ונתונה מטריצה $A$, כך ש- $T(v)=Av$, לכל $v\in R^n$.
הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A)=n$, אז $T$ חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A)=n$, אז $T$ על.

ג. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{Im}(T)\subseteq\text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v)=0$, אז $\text{rank}(A)\le\frac{n}{2}$.

**14)** נתונה העתקה לינארית $T:P_3[R]\to R$, המוגדרת על ידי $T(p(x))=p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T:P_n[R]\to R$.

**15)** נתונה העתקה לינארית $T:M_n[R]\to M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A)=A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של $T$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x,y,z)=\left(\frac{1}{3}(x+y-2z),\frac{1}{3}(2y-z-x),\frac{1}{3}(z+x+y)\right)$$

**2)** לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

**3)** חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a,b,c)=0.4a+0.6b+0.2c+(-0.4a+0.4b+0.2c)x+(-0.4c-0.2b+0.2a)x^2$$

**4)** חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}\left(a+bx+cx^2+dx^3\right)=\begin{pmatrix}b+c-d & -a+b+c-d\\ b-d & d\end{pmatrix}$$

**5)** לא.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.

**9)** שאלת הוכחה.

**10)** שאלת הוכחה.

**11)** שאלת הוכחה.

**12)** שאלת הוכחה.

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** א. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,-1+x^3\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=3$

$$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

ג. $\operatorname{Ker}(T)=span\left\{-1+x,-1+x^2,...,-1+x^n\right\},\ \dim\operatorname{Ker}(T)=n$

$\operatorname{Im}(T)=span\{1\},\ \dim\operatorname{Im}(T)=1$

לא חח"ע, כן על.

**15)** א. $\operatorname{Ker}(T)=\left\{\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\right\},\ \operatorname{Im}(T)=M_n[R]$

ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A)=A^T$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# פעולות עם העתקות לינאריות

## שאלות

בשאלות **1-9**, תהיינה $S:R^3\to R^2$ ו- $T:R^3\to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי: $S(x,y,z)=(x-z,y)$ , $T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$.

מצאו נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

**1)** $S+T$ **2)** $4S$ **3)** $4S-10T$ **4)** $TS$ **5)** $ST$

**6)** $T^2$ **7)** $T^{-1}$ **8)** $T^{-2}$ **9)** $S^2$

## תשובות סופיות

**1)** לא ניתן להגדיר.

**2)** $4S=4(x-z,y)$

**3)** לא ניתן להגדיר.

**4)** לא ניתן להגדיר.

**5)** $ST:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ; $St(x,y,z)=(z-4y,4x-y)$

**6)** $T^2(x,y,z)=(x,y,16x-8y+z)$

**7)** $T^{-1}(x,y,z)=(x,4x,-y,17x-4y-z)$

**8)** $T^{-2}(x,y,z)=(x,y,-16x+8y+z)$

**9)** לא ניתן להגדיר.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©