

אלגברה לינארית למערכות מידע

פרק 7 - העתקות ליניאריות

תוכן העניינים

1. העתקות ליניאריות..... 1
2. גרעין ותמונה של העתקות ליניאריות..... 3
3. העתקות ליניאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם..... 6

העתקות לינאריות

שאלות

בשאלות 1-15, קבעו, עבור כל אחת מההעתקות, אם היא העתקה לינארית:

$$T(x, y) = (x + y, x - y) ; T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) ; T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) ; T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[\mathbb{R}]) \quad T(A) = BA + AB ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} ; T : M_n[\mathbb{R}] \rightarrow M_n[\mathbb{R}] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 ; T : P_3[\mathbb{R}] \rightarrow P_2[\mathbb{R}] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_n[\mathbb{R}] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) ; T : P_n[\mathbb{R}] \rightarrow P_{2n}[\mathbb{R}] \quad (14)$$

$$(F = \mathbb{C}, F = \mathbb{R}) \quad T(z) = \bar{z} ; T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

16 עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה), ההעתקה הבאה תהיה ליניארית:
 $T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x)$; $T: R^2 \rightarrow R^2$?

בשאלות **17-20**, קבעו האם קיימת העתקה ליניארית המקיימת את הנתון.
 אם כן, מצאו את ההעתקה וקבעו האם היא יחידה. אם לא, נמקו מדוע.

17 $T: R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1,1,0) = (1,2,3)$, $T(0,1,1) = (4,5,6)$, $T(0,0,1) = (7,8,9)$

18 $T: R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1,0,1) = (1,1,0)$, $T(0,1,1) = (1,2,1)$, $T(0,0,1) = (0,1,1)$

19 $T: R^4 \rightarrow R^3$ כך ש-

$T(1,2,-1,0) = (0,1,-1)$, $T(-1,0,1,1) = (1,0,0)$, $T(0,4,0,2) = (2,2,-2)$

20 $T: P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1-x) = x^2 + 1$

$T(1,0,0) = (a_1, a_2, a_3)$

21 נתונה העתקה ליניארית $T: R^3 \rightarrow R^3$, המקיימת:

$T(0,1,0) = (b_1, b_2, b_3)$

$T(0,0,1) = (c_1, c_2, c_3)$

א. הוכיחו שנוסחת ההעתקה נתונה על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ב. נסחו והוכיחו טענה דומה לטענה מסעיף א' עבור $T: R^n \rightarrow R^m$

22 נתונה העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל.

ב. אם $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ קבוצה בת"ל, אז $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_k)\}$ קבוצה בת"ל.

תשובות סופיות

(1) כן	(2) כן	(3) לא	(4) לא	(5) לא
(6) כן	(7) כן	(8) לא	(9) לא	(10) לא
(11) כן	(12) כן	(13) כן	(14) לא	(15) לא
(16) כן	(17) כן	(18) כן	(19) כן	(20) כן

(21) שאלת הוכחה. (22) שאלת הוכחה.

גרעין ותמונה של העתקות לינאריות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-6, מצאו:

א. בסיס ומימד לגרעין.

ב. בסיס ומימד לתמונה.

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t), \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z), \quad T: R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad T: R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A, \quad T: M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4), \quad T: P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x), \quad D: P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

(7) מצאו העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$,
אשר תמונתה נפרשת על ידי: $\{(4, 1, 4), (-1, 4, 1)\}$.

(8) מצאו העתקה לינארית $T: R^4 \rightarrow R^3$,
אשר הגרעין שלה נפרש על ידי: $\{(0, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4)\}$.

נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow U$.

(9) הוכיחו כי אם $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$ אז הממד של V זוגי.

(10) הוכיחו או הפריכו:

א. קימת העתקה לינארית $T: R^5 \rightarrow R^5$ שעבורה $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.

ב. קימת העתקה לינארית $T: R^4 \rightarrow R^4$ שעבורה $\text{Ker}(T) = \text{Im}(T)$.

11 ידוע שהעתקה ליניארית $T: V \rightarrow W$, מקיימת: $\dim \text{Im}(T) = \dim \text{Ker}(T)$, $\dim(W) = 4$.
מי מבין הבאים יכול להיות הממד של V ?

א. 10

ב. 9

ג. 7

ד. 6

ה. כל התשובות לא נכונות.

12 הוכיחו או הפריכו:א. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ מתקיים $\text{Im}(T^2) \subseteq \text{Im}(T)$.ב. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$ שמקיימת:

$$T = T^2, \text{Im}(T) = \text{Im}(T^2), \text{Ker}(T) = \text{Ker}(T^2)$$

ג. לכל העתקה ליניארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$,אז בהכרח $T = 0$.**13** מטריצה $A_{m \times n}$ מגדירה העתקה $T: R^n \rightarrow R^m$; $T(x) = Ax$,ואילו $A_{n \times m}^T$ מגדירה העתקה $S: R^m \rightarrow R^n$; $S(y) = A^T y$.הראו כי $\text{Im}(T) = (\text{Ker}(S))^\perp$.

תשובות סופיות

(1) גרעין – בסיס : $\{(0,0,1,4)\}$, מימד : 1 . תמונה – כל בסיס של \mathbb{R}^3 , מימד : 3 .

(2) גרעין – בסיס : $\{(0,0,0)\}$, מימד : 0 .

תמונה – בסיס : $\{(1,1,0,1), (0,5,1,4), (0,0,-6,21)\}$, מימד : 3 .

(3) גרעין – בסיס : $\{(1,-2,1,0), (-7,3,0,1)\}$, מימד : 2 .

תמונה – בסיס : $\{(1,1,2), (0,1,2)\}$, מימד : 2 .

(4) גרעין – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2 .

תמונה – בסיס : $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$, מימד : 2 .

(5) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1 .

תמונה – בסיס : $\{p(x)=2x+5, p(x)=1\}$, מימד : 2 .

(6) גרעין – בסיס : $\{p(x)=1\}$, מימד : 1 .

תמונה – בסיס : $\{p(x)=x^2, p(x)=x, p(x)=1\}$, מימד : 3 .

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$T(x, y, z, t) = (-x - y + z, -2x - y + t, 0) \quad (8)$$

(9) שאלת הוכחה.

(10) לא.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

העתקות לינאריות חד-חד ערכיות ועל, איזומורפיזם

שאלות

עבור כל אחת מההעתקות בשאלות 1-4, קבעו האם היא חח"ע¹, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה. כמו כן, במידה וקיימת העתקה הפוכה, מצאו אותה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

$$(5) \quad \text{האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית } T: R^4 \rightarrow R^3 ?$$

$$(6) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: U \rightarrow V \text{ הוכיחו:}$$

- א. אם $\dim(U) < \dim(V)$, אז T לא על.
 ב. אם $\dim(U) > \dim(V)$, אז T לא חח"ע.
 ג. אם $\dim(U) = \dim(V)$, אז T חח"ע $\Leftrightarrow T$ על.

$$(7) \quad \text{נתונה העתקה לינארית } T: V \rightarrow W \text{ הוכיחו או הפריכו:}$$

- א. אם $\dim \text{Ker}(T) \neq 0$, אז ההעתקה T אינה על.
 ב. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \leq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
 ג. אם $\dim \text{Ker}(T) = 0$ ו- $\dim(V) \geq \dim(W)$, אז ההעתקה T היא על.
 ד. אם $\dim(V) < \dim(W)$, אז ההעתקה T חח"ע.

¹ הערה: העתקה חח"ע נקראת גם לא-סינגולרית.

(8) נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow W$; $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V .
הוכח או הפרך:

- א. אם $\dim(V) > \dim(W)$ ואם $T(v_1) = 0$, אז ייתכן מקרה שבו T חח"ע.
ב. אם $\dim(V) > \dim(W)$, הקבוצה $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל.

(9) נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow W$.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ קבוצה בת"ל ב- V .

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם T חח"ע, אז הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W .
ב. אם הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ בת"ל ב- W , אז T חח"ע.

(10) נתונה העתקה לינארית $T: R^n \rightarrow R^m$.

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם T היא איזומורפיזם אז $m = n$.
ב. אם $m > n$, אז T חח"ע.
ג. אם $T(v) = Av$ לכל v , אז למטריצה A יש n שורות ו- m עמודות.

(11) נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$, המקיימת $\text{Im}(T) = \text{Ker}(T)$.

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם T על, אז בהכרח $V = \{0\}$.
ב. אם T חח"ע, אז בהכרח $V = \{0\}$.
ג. T היא איזומורפיזם.
ד. T היא העתקת האפס.

(12) נתונה העתקה לינארית $T: R^n \rightarrow R^m$, ונתונה מטריצה $A_{m \times n}$,

כך ש- $T(v) = Av$, לכל $v \in R^n$.

הוכיחו או הפריכו:

- א. אם $v \in \text{Ker}(T)$, אז $v \in \text{rowsp}(A)$.
ב. אם $v \in \text{rowsp}(A)$, אז $v \in \text{Ker}(T)$.
ג. אם $v \in \text{colsp}(A)$, אז $v \in \text{Im}(T)$.
ד. אם $\text{Ker}(T) = \{0\}$, אז $n < m$.

13 נתונה העתקה לינארית $T: R^n \rightarrow R^n$, ונתונה מטריצה A ,

כך ש- $T(v) = Av$, לכל $v \in R^n$.

הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T חח"ע.

ב. אם $\text{rank}(A) = n$, אז T על.

ג. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{Im}(T) \subseteq \text{Ker}(T)$.

ד. אם $T^2(v) = 0$, אז $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$.

14 נתונה העתקה לינארית $T: P_3[R] \rightarrow R$, המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p(1)$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. ענו על הסעיפים הקודמים עבור $T: P_n[R] \rightarrow R$.

15 נתונה העתקה לינארית $T: M_n[R] \rightarrow M_n[R]$, המוגדרת על ידי $T(A) = A^T$.

א. מצאו את הגרעין והתמונה של ההעתקה.

ב. קבעו האם ההעתקה היא חח"ע/על.

ג. מצאו את ההעתקה ההפוכה של T .

תשובות סופיות

(1) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}(x + y - 2z), \frac{1}{3}(2y - z - x), \frac{1}{3}(z + x + y) \right)$$

(2) לא חח"ע ולא על, ולכן לא איזומורפיזם ואין לה העתקה הפיכה.

(3) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a, b, c) = 0.4a + 0.6b + 0.2c + (-0.4a + 0.4b + 0.2c)x + (-0.4c - 0.2b + 0.2a)x^2$$

(4) חח"ע, על, איזומורפיזם ויש לה העתקה הפיכה:

$$T^{-1}(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} b + c - d & -a + b + c - d \\ b - d & d \end{pmatrix}$$

(5) לא.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

(9) שאלת הוכחה.

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12) שאלת הוכחה.

(13) שאלת הוכחה.

(14) א. $\text{Ker}(T) = \text{span}\{-1 + x, -1 + x^2, -1 + x^3\}$, $\dim \text{Ker}(T) = 3$.

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{1\}, \dim \text{Im}(T) = 1$$

ב. לא חח"ע, כן על.

א. $\text{Ker}(T) = \text{span}\{-1 + x, -1 + x^2, \dots, -1 + x^n\}$, $\dim \text{Ker}(T) = n$.

$$\text{Im}(T) = \text{span}\{1\}, \dim \text{Im}(T) = 1$$

לא חח"ע, כן על.

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{Im}(T) = M_n[\mathbb{R}] \quad \text{א. (15)}$$

ב. חח"ע ועל. ג. $T^{-1}(A) = A^T$.