

# חשמל גלים ואופטיקה

פרק 7 - הסבר על אינטגרלים

תוכן העניינים

1. נגזרות ואינטגרלים בסיסיים.....1

## נגזרות ואינטגרלים בסיסיים:

### רקע

#### נגזרות:

הנגזרת נותנת את שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה כלשהיא.

אם  $y$  היא פונקציה של  $x$  אז הסימון של הנגזרת של  $y$  לפי  $x$  הוא  $\frac{dy}{dx}$  או  $y'$ .

#### נגזרת של פולינום:

$$y(x) = x^n \quad \rightarrow \quad y'(x) = nx^{n-1}$$

#### כפל בקבוע אפשר להוציא מהנגזרת:

$$(Ay(x))' = Ay'(x)$$

#### נגזרת של מכפלה:

$$y(x) = f(x)g(x) \quad \rightarrow \quad y'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

#### כלל שרשרת:

אם  $y$  היא פונקציה של  $x$  ו- $x$  הוא פונקציה של  $t$  אז:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

#### נגזרות של פונקציות נוספות:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} ; \quad \frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x ; \quad \frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x ; \quad \frac{d}{dx} (\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

**אינטגרל:**

פעולה הפוכה לנגזרת.

**אינטגרל של פולינום**

$$\int Ax^n dx = A \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

אינטגרל לא מסוים, מוסיפים קבוע לתוצאת האינטגרל.

אינטגרל מסוים, מציבים גבולות בתוצאה של האינטגרל.

$$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

**מה עושה האינטגרל?**

האינטגרל מבצע סכימה על ערכי הפונקציה.

האינטגרל נותן את השטח מתחת לגרף הפונקציה.

## שאלות:

## 1 דוגמה 1

חשב את הנגזרות הבאות:

א.  $y = 5x^4, \frac{dy}{dx} = ?$

ב.  $y = ax^5, \frac{dy}{dx} = ?$

ג.  $y = 5x + 2x^{18}, \frac{dy}{dx} = ?$

ד.  $f(x) = 8x^2 + 2, \frac{df}{dx} = ?$

ה.  $y = 6t^2, \frac{dy}{dt} = ?$

ו.  $x = 5t^3, \frac{dx}{dt} = ?$

ז.  $x = 5t^4 + t^3 + 4, \frac{dx}{dt} = ?$

ח.  $f(t) = At^6 + Bt + C, \frac{df}{dt} = ?$

## 2 דוגמה 2

חשב את הנגזרות הבאות:

א.  $y = (5x^4 + 2)(5x + 2x^{18}), \frac{dy}{dx} = ?$

ב.  $y = Ax^5(B + Cx^3), \frac{dy}{dx} = ?$

ג.  $y = 5x + 2x^2(4x + 5x^5), \frac{dy}{dx} = ?$

ד.  $y = (5t^2 + 1)(2t + 27 + 5t^3), \frac{dy}{dt} = ?$

ה.  $x = (2t^3 + 7)(4t + 3 + 6t^2), \frac{dx}{dt} = ?$

**3) דוגמה 3-נגזרת פנימית**

חשב את הנגזרות הבאות:

א.  $y = (x+2)^4$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ב.  $y = 5(8x^2 + x)^5$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ג.  $y = 5t + 2(5t^4 + 4)^{14}$ ,  $\frac{dy}{dx} = ?$

ד.  $f(t) = 8(5t^4 + t^3 + 4)^2 + 2$ ,  $\frac{df}{dt} = ?$

**4) דוגמה 4-כלל שרשרת**

חשב את הנגזרות הבאות:

א.  $y = (x+2)^4$ ,  $x = 2t$ ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ב.  $y = 5(8x^2 + x)^5$ ,  $x = 5t^4 + 4$ ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ג.  $y = 5x + 2(5x^4 + 4)^{14}$ ,  $x = 3t^2 + t$ ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

ד.  $y = x^2$ ,  $x = t^2$ ,  $\frac{dy}{dt} = ?$

**5) דוגמה 5-נגזרות של פונקציות נוספות**

מצאו את הנגזרות של הפונקציות הבאות:

א.  $y = \sin(ax)$  כאשר  $a$  קבוע.

ב.  $y = e^{-x^2}$

**6) דוגמה 1-אינטגרלים בסיסיים**

חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int x^7 dx$

ב.  $\int x dx$

ג.  $\int dx$

ד.  $\int 3 dx$

ה.  $\int 7x^4 dx$

ו.  $\int (5x^2 + 3) dx$

$$\int (8x^7 + 5x) dx \quad \text{ז.}$$

$$\int Ax^7 dx \quad \text{ח.}$$

$$\int (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ט.}$$

**(7) דוגמה 2-אינטגרל מסוים**  
 חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^2 x^5 dx \quad \text{א.}$$

$$\int_1^5 4 dx \quad \text{ב.}$$

$$\int_{-1}^3 7x^4 dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^4 (2x^2 + 4) dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_{-1}^2 (Ax^7 + Bx) dx \quad \text{ה.}$$

**(8) דוגמה 3-אינטגרל של פונקציות נוספות**  
 חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^\pi \cos(2x) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int e^{3x} dx \quad \text{ג.}$$

$$\int_0^5 2e^{-3x} dx \quad \text{ד.}$$

$$\int_3^5 \frac{1}{x} dx \quad \text{ה.}$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad \text{ו.}$$

$$\int e^{ax} dx \quad \text{ז.}$$

**תשובות סופיות:**

- (1) א.  $20x^3$  ב.  $5a \cdot x^4$  ג.  $5 + 36x^{17}$  ד.  $16x$  ה.  $12 \cdot t$   
 ו.  $15t^2$  ז.  $20t^3 + 3t^2$  ח.  $6At^5 + B$
- (2) א.  $20x^3 \cdot (5x + 2x^{18}) + (5x^4 + 2)(5 + 36x^{17})$  ב.  $5Ax^4(B + Cx^3) + 3ACx^7$  ג.  $5 + 4x \cdot (4x + 5x^5) + 2x^2(4 + 25x^4)$   
 ד.  $(10t)(2t + 27 + 5t^3) + (5t^2 + 1)(2 + 0 + 15t^2)$   
 ה.  $(6t^2 + 0)(4t + 3 + 6t^2) + (2t^3 + 7)(4 + 0 + 12t)$
- (3) א.  $4(x + 2)^3 \cdot 1$  ב.  $25(8x^2 + x)^4(16x + 1)$  ג.  $5 + 560t^3(5t^4 + 4)^{13}$  ד.  $16(5t^4 + t^3 + 4)(20t^3 + 3t^2)$
- (4) א.  $8(2t + 2)^3$  ב.  $500t^3(8(5t^4 + 4)^2 + 5t^4 + 4) \cdot (16(5t^4 + 4) + 1)$  ג.  $(5 + 2 \cdot 14(5x^4 + 4)^{13} \cdot (5 \cdot 4x^3 + 0)) \cdot (3 + 2t + 1)$  ד.  $4t^3$
- (5) א.  $\cos(ax) \cdot a$  ב.  $e^{-x^2} \cdot (-2x)$
- (6) א.  $\frac{x^8}{8} + C$  ב.  $\frac{x^2}{2} + C$  ג.  $x + C$  ד.  $3x$  ה.  $\frac{7x^5}{5} + C$  ו.  $x^8 + \frac{5}{2}x^2 + C$  ז.  $A \cdot \frac{x^8}{8} + C$  ח.  $A \frac{x^8}{8} + B \frac{x^2}{2} + C$
- (7) א.  $10.67$  ב.  $16$  ג.  $341.6$  ד.  $58.67$  ה.  $31.875A + 1.5B$
- (8) א.  $2$  ב.  $0$  ג.  $\frac{e^{3x}}{3} + C$  ד.  $\frac{2}{3}$  ה.  $\ln\left(\frac{5}{3}\right)$  ו.  $\frac{e^{ax}}{a}$  ז.  $-\frac{1}{x} + C$