תהליכים אקראיים בפיזיקה

פרק 28 - המשתנה המקרי הרציף - התפלגויות כלליות - שימוש באינטרגלים

תוכן העניינים

1. כללי 1

המשתנה המקרי הרציף – התפלגויות כלליות (שימוש באינטגרלים)

רקע:

בפרק זה נעסוק בהתפלגות של משתנים מקריים רציפים (גובה אדם אקראי, זמן תגובה וכו'). משתנים רציפים הם משתנים שבתחום מסוים מקבלים רצף אינסופי של ערכים אפשריים בניגוד למשתנים בדידים. נתאר את המשתנה המקרי הרציף על ידי פונקציה הנקראת פונקציית צפיפות.

באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב- $f(x)$.

השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות. פונקציית צפיפות חייבת להיות לא-שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

הגדרות יסודיות:

יהא משתנה רציף X בעל פונקציית צפיפות $f(x)$.

פונקציית התפלגות מצטברת:

פונקציית ההתפלגות המצטברת מוגדרת באופן הבא: $F(t)=p(X\le t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

כמו כן מתקיים: $p(X>t)=1-F(t)$ ו- $p(a<X<b)=F(b)-F(a)$.

תוחלת ושונות של משתנה רציף:

תוחלת של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X\cdot f(x)dx=\mu$.

שונות של משתנה רציף תחושב באופן הבא: $V(X)=\int_{-\infty}^{\infty} X^2\cdot f(x)dx-\mu^2=\sigma^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תוחלת של פונקציה של X:

תוחלת של פונקציית משתנה רציף X, המסומנת: $g(x)$, תחושב באופן הבא: $E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)dx$.

אחוזונים:

האחוזון ה- p הוא ערך (נסמן אותו: x_p), שהסיכוי ליפול מתחתיו הוא p.

כלומר: $p(X\le x_p)=p$.

ריענון מתמטי:

נוסחאות לחישוב שטחים

שטח משולש: גובה (h) כפול הבסיס (a) חלקי 2: $S_{\text{triangle}}=\frac{h\cdot a}{2}$.

שטח מלבן: אורך (a) כפול רוחב (b): $S_{\text{rectangle}}=a\cdot b$.

משוואת קו ישר:

משוואת ישר מפורשת תסומן: $y=mx+n$, כאשר m הוא שיפוע הישר ו- n היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y.

שיפוע ישר העובר דרך שתי נקודות: $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ הוא: $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

משוואת ישר שעובר דרך נקודה ספציפית (x_1,y_1) ושיפועו הוא m, תחושב באופן הבא: $y-y_1=m(x-x_1)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

אינטגרלים מידיים:

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1 \qquad \int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \qquad \int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c \qquad \int k^{ax+b}dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \qquad \int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int \tan(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c \qquad \int \cot(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c \qquad \int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f}dx = \ln|f| + c \qquad \int f \cdot f'\,dx = \frac{1}{2}f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f'\,dx = e^f + c \qquad \int \cos f \cdot f'\,dx = \sin(f) + c$$

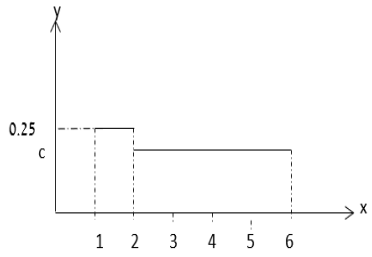
$$\int \sin f \cdot f'\,dx = -\cos(f) + c \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{f}}dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f'\,dx = \frac{2}{3}f^{\frac{3}{2}} + c \qquad \int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) X הינו משתנה רציף עם פונקציית צפיפות כמוצג בשרטוטו:



א. מצאו את ערכו של c.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

i. $P(x<4)$.

ii. $P(x>1.5)$.

iii. $P(1.5<x<5)$.

iv. $P(5<x<10)$.

v. מצאו את החציון של המשתנה.

2) נתון משתנה מקרי רציף A שפונקציית הצפיפות שלו היא: $f(x)=\begin{cases}cx & 0\le x\le b\\ 0 & else\end{cases}$,

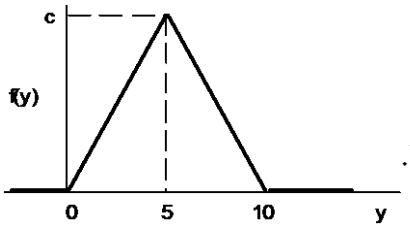
וידוע ש- $P(0<X<1)=\frac{1}{4}$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X.

ב. מצאו את החציון של X.

ג. מה הסיכוי ש-X קטן מ-0.5?

3) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y:



א. מצאו את c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

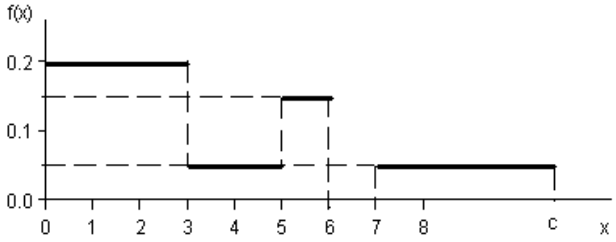
$P(Y=7.0)$, $P(Y\le 3.0)$, $P(7.5\le Y\le 15.5)$, $P(Y>4)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון: $y_{0.1}$, הרבעון התחתון: $y_{0.25}$ והחציון של Y.

הסיקו מהו העשירון עליון: $y_{0.9}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

4) נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X:



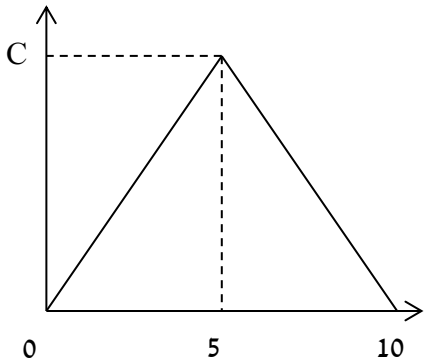
א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות:

$P(1.0 < X \le 5.0)$, $P(X \ge -2.0)$, $P(X \ge 4)$.

5) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה:



א. מה ערכו של c?

ב. מצאו אינטרוול (תחום) סימטרי סביב הערך 5, שהסיכוי ליפול בו הינו 0.5.

6) נתונה פונקציית צפיפות: $f(X)=\frac{2}{x}$, המוגדרת מ-1 עד K.

א. מצאו את ערכו של K.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את הסיכוי ש-X לפחות 1.5.

ד. מצאו את העשירון התחתון של ההתפלגות.

ה. מה התוחלת של X?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

7) נתונה פונקציית צפיפות הבאה: $f(X)=AX^2(10-X)$, $0<X<10$.
A הינו קבוע חיובי.

א. מצאו את A.

ב. חשב את: $P(x>5|x>2)$.

ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

8) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X:
$f(x)=0.5\cdot e^{2x}$, $-\infty \le X \le \ln(c)$.

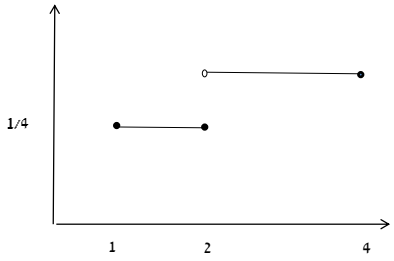
א. מצאו את ערכו של c.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.

ג. חשב: $P(X>0)$.

ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

9) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X:



א. רשמו את נוסחת פונקציית הצפיפות.

ב. בנו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. מצאו את החציון של ההתפלגות.

ד. חשבו את התוחלת והשונות של המשתנה.

ה. חשבו את: $E(X^3)$.

10) במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=6x(1-x)$, $0\le x\le 1$.

א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ-20 דקות?

ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?

ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ-20 דקות?

11) זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה: $F(t)=1-e^{-0.2t}$.

א. שרטטו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?

ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?

ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

12) פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<4\\ bx-4b & 4\le x\le 5\\ b & 5<x\le 6\\ 0 & x>6\end{cases}.$$

א. מצאו את b.

ב. חשבו את התוחלת של X.

ג. y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5.
מהי השונות של y?

13) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{4} & 1\le x\le 2\\ kx & 2<x\le 3\end{cases}$.

א. מצאו את ערכו של k.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו $P(x>2.5)$.

14) להלן משתנה מקרי בעל פונקציית צפיפות הבאה: $f(x)=\frac{1}{b-a}\ ,\ a\le x\le b$.

א. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ב. חשב את התוחלת והשונות של ההתפלגות.

ג. מצאו את התוחלת של $\frac{1}{X}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{16}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{16} & 2<t\le 6\\ 1 & t>6\end{cases}$. ג. i. $\frac{5}{8}$.

ii. $\frac{7}{8}$. iii. $\frac{11}{16}$. iv. $\frac{3}{16}$. ד. $3\frac{1}{3}$.

2) א. $c=0.5$, $b=2$. ב. 1.41. ג. 0.0625.

3) א. 0.2. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.02t^2 & 0\le t\le 5\\ 1-0.02(t-10)^2 & 5<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$.

ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32.

ד. עשירון תחתון: 2.24, רבעון תחתון: 3.54, החציון: 5, עשירון עליון: 7.76.

4) א. 10. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 0.2t & 0<t\le 3\\ 0.6+(t-3)\cdot 0.05 & 3<t\le 5\\ 0.7+(t-5)\cdot 0.15 & 5<t\le 6\\ 0.85 & 6<t\le 7\\ 0.85+(t-7)\cdot 0.05 & 7<t\le 10\\ 1 & t>10\end{cases}$. ג. 0.5.

5) א. $c=0.2$. ב. 5 ± 1.46.

6) א. $e^{\frac{1}{2}}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2\cdot\ln t & 1\le t\le e^{\frac{1}{2}}\\ 1 & t>e^{\frac{1}{2}}\end{cases}$. ג. 0.189.

ד. 1.051. ה. 1.297.

7) א. 0.0012. ב. 0.7067. ג. תוחלת: 6, שונות: 4.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) א. 2. ב. $F(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{2t} & t\le \ln(2)\\ 1 & t>\ln(2)\end{cases}$. ג. 0.75. ד. 0.549.

9) א. $F(t)=\begin{cases}\frac{1}{4} & 1\le x\le 2\\ \frac{3}{8} & 2<x\le 4\\ 0 & \text{אחר}\end{cases}$ ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ (t-1)0.25 & 1\le t\le 2\\ 0.25+(t-2)\cdot\frac{3}{8} & 2<t\le 4\\ 1 & t>4\end{cases}$.

ג. $2\frac{2}{3}$. ד. תוחלת: 2.625, שונות: 0.6927. ה. 23.4375.

10) א. $\frac{7}{27}$. ב. 0. ג. 3.704.

11) א. עיין סרטוט בוידאו. ב. 0.0498. ג. 0.6321. ד. 11.51.

12) א. $\frac{2}{3}$. ב. 5.22. ג. $\frac{2}{9}$.

13) א. $\frac{1}{6}$. ב. $F(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ \frac{t^3-1}{12} & 1\le t\le 2\\ \frac{7}{12}+\frac{t^2-4}{12} & 2<t\le 3\\ 1 & t>3\end{cases}$. ג. 0.229.

14) א. $F(t)=\begin{cases}0 & t<a\\ \frac{(t-b)}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & t>b\end{cases}$. ב. תוחלת: $E(X)=\frac{a+b}{2}$, שונות: $V(x)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

ג. $\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל