תורת ההסתברות

פרק 40 - המשתנה המקרי הדו ממדי הרציף

תוכן העניינים

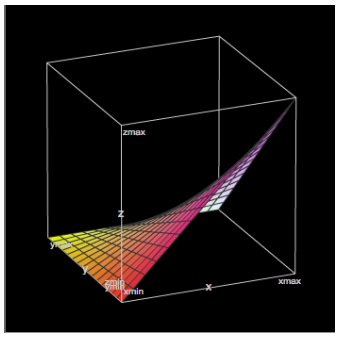
1. משתנה דו ממדי רציף 1

משתנה מקרי דו ממדי רציף:

רקע:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים.
פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי: $f(x,y)$.
פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

1) $f(x,y)\geq 0$ לכל $(x,y)\in R$.
2) $\iint_R f(x,y)dxdy=1$.



דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\leq x,y\leq 1\\ 0 & else\end{cases}$.

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.

פונקציית צפיפות שולית:

פונקציית הצפיפות השולית של X תתקבל באופן הבא: $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$.

פונקציית הצפיפות השולית של Y תתקבל באופן הבא: $f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

מצאו לפונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\leq x,y\leq 1\\ 0 & else\end{cases}$

את פונקציית הצפיפות השולית של X, וחשבו את $E(X)$ דרכה.

אי-תלות בין משתנים רציפים:

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y בתחום ההגדרה R מתקיים ש: $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

דוגמה (פתרון בהקלטה):

האם X ו- Y, המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases},$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי:

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x,y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- X ו- Y יהיו בתחום הזה: $P\left[(x,y)\in A\right]=\iint\limits_A f(x,y)dxdy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s,t)=P(X\le s\cap Y\le t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s}f(x,y)dxdy.$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

ועל פיה חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

פונקציית צפיפות מותנית:

אם ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$, אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של X , בהינתן ש- $Y=y$ לכל ערכי y המקיימים: $f(y)>0$ על ידי: $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$.

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש- $X=x$ לכל ערכי x המקיימים: $f(x)>0$ על ידי: $f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $f(x|y)$.

תוחלת מותנית:

ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$.

התוחלת של X בהינתן ש- $Y=y$ תהיה: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x|y)dx$.

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש $X=x$ תהיה:

$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(y|x)dy$.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $E(X|Y)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=x+y$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$. הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.

2) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=Ax(x-y)$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 2$ וגם: $-x\le y\le x$. מצאו את ערכו של הפרמטר A.

3) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{(x\cdot y)^3+x\cdot y}{C}$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$.

א. מצאו את ערכו של C.

ב. מצאו את $f(y)$.

ג. האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?

4) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{1}{800}$, המוגדרת בתחום שבו: $60\le x\le y$ וגם: $60\le y\le 100$.

א. הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של Y.

ג. חשבו את $V(X)$, $E(X)$.

ד. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?

ה. חשבו את מקדם המתאם בין X ל- Y.

ו. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X+10)$.

5) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$f(x,y)=\lambda\mu\cdot e^{-(\lambda x+\mu y)}$, המוגדרת בתחום שבו: $x,y>0$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y.

ב. האם X ו- Y הם משתנים תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y?

ד. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

6) Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע: $[2,4]$.

בנוסף, נתון ש- X הינו משתנה מקרי רציף המקיים: $0 \le x \le y$, $f\left(x|y\right)=\frac{2x}{y^2}$.

מצאו את השונות המשותפת של X ו- Y.

7) נתונים שני משתנים מקרים רציפים X ו- Y. פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא: $f\left(x,y\right)=\begin{cases} x & 0<y<1 \quad 1-y\le x\le 1+y \\ 0 & else \end{cases}$.

א. מצאו את $f\left(x\right)$.

ב. מצאו את $f\left(y|x\right)$.

ג. מצאו את $E\left(Y|X\right)$.

8) יהיו X ו- Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו: $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,2)$.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.

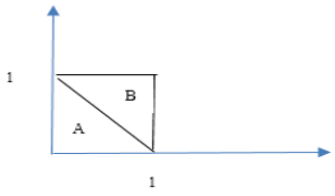
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ו- Y.

ג. חשבו את התוחלת של X ו- Y.

ד. האם X ו- Y משתנים בלתי מתואמים?

ה. האם X ו- Y משתנים בלתי תלויים?

9) פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:
הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש B היא 0.5.
האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?



א. מצאו את $f\left(x\right)$.

ב. מצאו את $f\left(x|y\right)$.

10) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f\left(x,y\right)=cx$. פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וכן: $0\le y\le x^2$.

א. מצאו את הקבוע C.

ב. חשבו את ההסתברות ש- $6Y<1-X$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

11) נתונים X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y \sim U(0,1)$
ו- $X \mid Y=y \sim U\left(0,\sqrt{y}\right)$. חשבו את: $E(Y \mid X=0.5)$.

12) נתונה פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=2e^{-x}\cdot e^{-2y}$ בתחום שבו: $x,y \geq 0$.
חשבו את הסיכוי: $P(X<Y)$.

13) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x,y)=\dfrac{e^{-y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$, המוגדרת לרביע הראשון. חשבו את: $P(X>1 \mid Y=2)$.

14) יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל-9:00.
נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

15) נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X \sim N(Y,1)$ ו- $Y \sim U(0,2)$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y.

ב. מצאו את $E\left(X^2 \mid Y\right)$.

ג. מצאו את $E(X)$.

16) פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y היא: $f(x,y)=1$.
פונקציה זו מוגדרת בתחומי: $0 \leq x,y \leq 1$.
הוכיחו ש: $E\left(|X-Y|^n\right)=\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

17) $X \sim \exp(1)$ וכן: $Y \sim \exp(1)$, הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.
נגדיר את: $Z=\dfrac{X}{X+Y}$.
הוכיחו: $Z \sim U(0,1)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) $A=\frac{1}{8}$.

3) א. $\frac{5}{16}$. ב. $f(y)=0.8y^3+1.6y$. ג. תלויים.

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f(y)=\frac{y-60}{800}$. ג. $E(X)=73\frac{1}{3}$, $V(X)=88\frac{8}{9}$.

ד. לא. ה. 0.5. ו. 0.5625.

5) א. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $f(y)=\mu e^{-\mu y}$. ב. לא.

ג. 0. ד. $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

6) $\frac{2}{9}$.

7) א. $f(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 2x-x^2 & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

ב. $f(y|x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & 0\le x<1 \quad 1-x<y<1 \\ \frac{1}{2-x} & 1\le x\le 2 \quad x-1<y<1 \\ 0 & else \end{cases}$.

ג. $E(y|x)=\begin{cases} 1-\frac{x}{2} & 0\le x<1 \\ \frac{x}{2} & 1\le x\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

8) א. $f(x,y)=\begin{cases} 1 & 1+x<y<1-x \quad -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$.

ב. $f(x)=\begin{cases} -2x & -1<x<0 \\ 0 & else \end{cases}$, $f(y)=\begin{cases} y & 0\le y<1 \\ 2-y & 1\le y\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$.

ג. $E(Y)=1$, $E(X)=-\frac{2}{3}$. ד. כן.

ה. לא.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

9) א. כן. ב. $f(x)=\begin{cases}1.5-x & 1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. $f(x|y)=\begin{cases}\frac{1.5}{1.5-y} & 0\le x<1-y\\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

10) א. 4. ב. 0.0947.

11) $\frac{7}{12}$.

12) $\frac{1}{3}$.

13) $e^{-\frac{1}{2}}$.

14) $\frac{25}{72}$.

15) א. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0<y<2\\ 0 & else\end{cases}$. ב. y^2+1.

ג. 1.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל