# הסתברות

## פרק 33 - המשתנה המקרי הדו ממדי הרציף

### תוכן העניינים

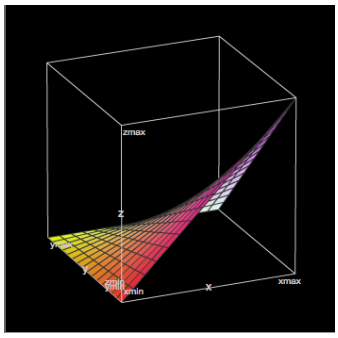
1. משתנה דו ממדי רציף ..... 1

# משתנה מקרי דו ממדי רציף:

## רקע:

יהיו $X$ ו- $Y$ משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום $R$ מסוים.
פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי: $f(x,y)$.
פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

1) $f(x,y)\geq 0$ לכל $(x,y)\in R$.
2) $\iint_R f(x,y)dxdy=1$.




**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\leq x,y\leq 1\\ 0 & else\end{cases}$.

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.

**פונקציית צפיפות שולית:**

פונקציית הצפיפות השולית של $X$ תתקבל באופן הבא: $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$.

פונקציית הצפיפות השולית של $Y$ תתקבל באופן הבא: $f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

מצאו לפונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\leq x,y\leq 1\\ 0 & else\end{cases}$

את פונקציית הצפיפות השולית של $X$, וחשבו את $E(X)$ דרכה.

**אי-תלות בין משתנים רציפים:**

$X$ ו- $Y$ יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל $X$ ו- $Y$ בתחום ההגדרה $R$ מתקיים ש: $f(x,y)=f(x)\cdot f(y)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

האם $X$ ו- $Y$, המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases},$$

הם משתנים בלתי תלויים?

**חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי:**

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x,y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- $X$ ו- $Y$ יהיו בתחום הזה: $P\left[(x,y)\in A\right]=\iint\limits_A f(x,y)dxdy$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.

**פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:**

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s,t)=P(X\le s\cap Y\le t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s}f(x,y)dxdy.$$

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

ועל פיה חשבו את הסיכוי: $P(X<0.5\cap Y<0.5)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**פונקציית צפיפות מותנית:**

אם ל- $X$ ול- $Y$ ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$ , אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של $X$ , בהינתן ש- $Y=y$ לכל ערכי $y$ המקיימים: $f(y)>0$ על ידי: $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}$.

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של $Y$ בהינתן ש- $X=x$ לכל ערכי $x$ המקיימים: $f(x)>0$ על ידי: $f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f(x)}$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $f(x|y)$.

**תוחלת מותנית:**

ל- $X$ ול- $Y$ ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x,y)$.

התוחלת של $X$ בהינתן ש- $Y=y$ תהיה: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x|y)dx$.

ובאופן דומה, התוחלת של $Y$ בהינתן ש $X=x$ תהיה:

$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(y|x)dy$.

**דוגמה (פתרון בהקלטה):**

משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=\begin{cases}4x(1-y) & 0\le x,y\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

מצאו את: $E(X|Y)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=x+y$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$. הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.

**2)** נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=Ax(x-y)$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 2$ וגם: $-x\le y\le x$. מצאו את ערכו של הפרמטר $A$.

**3)** נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{(x\cdot y)^3+x\cdot y}{C}$, המוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וגם: $0\le y\le 1$.

א. מצאו את ערכו של $C$.

ב. מצאו את $f(y)$.

ג. האם $X$ ו-$Y$ הינם משתנים בלתי תלויים?

**4)** משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x,y)=\frac{1}{800}$, המוגדרת בתחום שבו: $60\le x\le y$ וגם: $60\le y\le 100$.

א. הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של $Y$.

ג. חשבו את $V(X)$, $E(X)$.

ד. האם $X$ ו-$Y$ הם משתנים בלתי תלויים?

ה. חשבו את מקדם המתאם בין $X$ ל-$Y$.

ו. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X+10)$.

**5)** משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:

$f(x,y)=\lambda\mu\cdot e^{-(\lambda x+\mu y)}$, המוגדרת בתחום שבו: $x,y>0$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות של $X$ ואת פונקציית הצפיפות של $Y$.

ב. האם $X$ ו-$Y$ הם משתנים תלויים?

ג. מהו מקדם המתאם בין $X$ ל-$Y$?

ד. חשבו את הסיכוי: $P(Y>X)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**6)** $Y$ הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע: $[2,4]$.

בנוסף, נתון ש- $X$ הינו משתנה מקרי רציף המקיים: $0 \le x \le y$ , $f\left(x|y\right)=\frac{2x}{y^2}$.

מצאו את השונות המשותפת של $X$ ו- $Y$.

**7)** נתונים שני משתנים מקרים רציפים $X$ ו- $Y$. פונקציות הצפיפות המשותפות שלהם היא: $f\left(x,y\right)=\begin{cases}x & 0<y<1 \quad 1-y\le x\le 1+y \\ 0 & else\end{cases}$.

א. מצאו את $f\left(x\right)$.

ב. מצאו את $f\left(y|x\right)$.

ג. מצאו את $E\left(Y|X\right)$.

**8)** יהיו $X$ ו- $Y$ משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו: $(0,1)$ , $(-1,0)$ , $(-1,2)$.

א. רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.

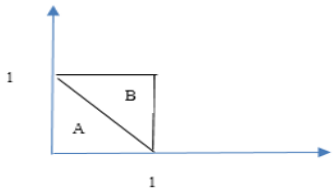
ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של $X$ ו- $Y$.

ג. חשבו את התוחלת של $X$ ו- $Y$.

ד. האם $X$ ו- $Y$ משתנים בלתי מתואמים?

ה. האם $X$ ו- $Y$ משתנים בלתי תלויים?

**9)** פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:
הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש B היא 0.5.
האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?




א. מצאו את $f\left(x\right)$.

ב. מצאו את $f\left(x|y\right)$.

**10)** נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f\left(x,y\right)=cx$. פונקציה זו מוגדרת בתחום שבו: $0\le x\le 1$ וכן: $0\le y\le x^2$.

א. מצאו את הקבוע $C$.

ב. חשבו את ההסתברות ש- $6Y<1-X$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**11)** נתונים $X$ ו- $Y$ שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y \sim U(0,1)$
ו- $X \mid Y=y \sim U\left(0,\sqrt{y}\right)$. חשבו את: $E(Y \mid X=0.5)$.

**12)** נתונה פונקציית הצפיפות: $f(x,y)=2e^{-x}\cdot e^{-2y}$ בתחום שבו: $x,y \geq 0$.
חשבו את הסיכוי: $P(X<Y)$.

**13)** נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x,y)=\frac{e^{-y}\cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$, המוגדרת לרביע הראשון. חשבו את: $P(X>1 \mid Y=2)$.

**14)** יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל-9:00.
נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

**15)** נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X \sim N(Y,1)$ ו- $Y \sim U(0,2)$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של $X$ ו- $Y$.

ב. מצאו את $E(X^2 \mid Y)$.

ג. מצאו את $E(X)$.

**16)** פונקציית הצפיפות המשותפת של $X$ ו- $Y$ היא: $f(x,y)=1$.
פונקציה זו מוגדרת בתחומי: $0 \leq x,y \leq 1$.
הוכיחו ש: $E(|X-Y|^n)=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

**17)** $X \sim \exp(1)$ וכן: $Y \sim \exp(1)$, הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.
נגדיר את: $Z=\frac{X}{X+Y}$.
הוכיחו: $Z \sim U(0,1)$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## תשובות סופיות:

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** $A=\frac{1}{8}$.

**3)** א. $\frac{5}{16}$. ב. $f(y)=0.8y^3+1.6y$. ג. תלויים.

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(y)=\frac{y-60}{800}$. ג. $E(X)=73\frac{1}{3}$ , $V(X)=88\frac{8}{9}$.
ד. לא. ה. 0.5. ו. 0.5625.

**5)** א. $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ , $f(y)=\mu e^{-\mu y}$. ב. לא.
ג. 0. ד. $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

**6)** $\frac{2}{9}$.

**7)** א. $f(x)=\begin{cases}x^2 & 0\le x<1\\ 2x-x^2 & 1\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. $f(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0\le x<1 \quad 1-x<y<1\\ \frac{1}{2-x} & 1\le x\le 2 \quad x-1<y<1\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. $E(y|x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2} & 0\le x<1\\ \frac{x}{2} & 1\le x\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

**8)** א. $f(x,y)=\begin{cases}1 & 1+x<y<1-x-1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$.

ב. $f(x)=\begin{cases}-2x & -1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$ , $f(y)=\begin{cases}y & 0\le y<1\\ 2-y & 1\le y\le 2\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. $E(Y)=1$ , $E(X)=-\frac{2}{3}$. ד. כן.
ה. לא.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**9)** א. כן. ב. $f(x)=\begin{cases}1.5-x & 1<x<0\\ 0 & else\end{cases}$.

ג. $f(x|y)=\begin{cases}\frac{1.5}{1.5-y} & 0\le x<1-y\\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$.

**10)** א. 4. ב. 0.0947.

**11)** $\frac{7}{12}$.

**12)** $\frac{1}{3}$.

**13)** $e^{-\frac{1}{2}}$.

**14)** $\frac{25}{72}$.

**15)** א. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0<y<2\\ 0 & else\end{cases}$. ב. $y^2+1$.

ג. 1.

**16)** שאלת הוכחה.

**17)** שאלת הוכחה.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל