

# תורת ההסתברות

פרק 41 - המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד - שאלות מסכמות (פרק 6,7 ממ"ן 13,14)

תוכן העניינים

1. שאלות מסכמות.....1

## המשתנה המקרי הדו ממדי הבדיד – שאלות מסכמות:

**רקע:**

**משתנים בלתי תלויים:**

יהיו משתנים  $X$  ו- $Y$ . הם יהיו משתנים בלתי תלויים אם עבור כל  $X$  ו- $Y$  אפשריים מתקיים:  $p(x=k, y=l) = p(x=k) \cdot p(y=l)$ .

**מקדם המתאם:**

מגדירים את מקדם המתאם:  $\rho = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ .

**שוונות משותפת:**

מגדירים את השוונות המשותפת:

$$\text{cov}(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E(x \cdot y) - E(x) \cdot E(y)$$

תכונות של השוונות המשותפת:

$$1. \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$2. \text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$$

$$3. \text{cov}[aX + b, cY + d] = a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y)$$

**משתנים בלתי מתואמים:**

משתנים בלתי מתואמים הם משתנים שמקדם המתאם שלהם אפס וכדי שדבר כזה יקרה השוונות המשותפת צריכה להתאפס.

**השפעת טרנספורמציה לינארית על מקדם המתאם:**

$$\rho[(aX+b), (cY+d)] = \begin{cases} \rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c > 0 \\ -\rho(X,Y) & \text{if } a \cdot c < 0 \end{cases}$$

**תוחלת ושונות של סכום משתנים:**

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \quad V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$$

**קומבינציות לינאריות:**

נגדיר קומבינציה ליניארית כללית באופן הבא:  $W = (aX + b) + (cY + d)$   
אזי מתקיים:

$$E(W) = E((aX + b) + (cY + d)) = aE(X) + b + cE(Y) + d$$

$$V(W) = V((aX + b) + (cY + d)) = a^2V(X) + c^2V(Y) + 2 \cdot a \cdot c \cdot \text{cov}(X, Y)$$

## שאלות:

- (1) יש ליצור סיסמה בת 3 תווים. כל תו יכול להיבחר רק מתוך כלל התווים הבאים: 1, 2, C, B, A. יהי  $X$  מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בסיסמה, ויהי  $Y$  מספר הפעמים שהספרה 1 מופיעה בקצה הסיסמה (שני הקצוות).
- א. זהו את ההתפלגויות השוליות של  $X$  ו- $Y$  כהתפלגויות מיוחדות.
  - ב. מצאו את ההתפלגות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$ .
  - ג. מצאו את מקדם המתאם בין  $X$  ל- $Y$ .
  - ד. מהו המתאם בין  $2X$  ל- $3Y+5$ ?
- (2) במסיבת סוף שנה ישנו ארגז קרח ובתוכו 7 בקבוקי בירה: 4 "מכבי", 2 "גולדסטאר" ו-1 "טובורג". קרן לקחה 3 בקבוקי בירה באקראי מתוך ארגז הקרח. נסמן ב- $X$  את מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן, ונסמן ב- $Y$  את מספר בקבוקי "טובורג" שנלקחו על ידי קרן.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$ .
  - ב. חשבו את התוחלת והשונות של  $X$  ושל  $Y$ .
  - ג. מצאו את השונות המשותפת של  $X$  ושל  $Y$ .
  - ד. נגדיר את  $W$  כמספר בקבוקי "גולדסטאר" שנלקחו על ידי קרן. בטאו את  $W$  באמצעות  $X$  ו- $Y$ , וחשבו את התוחלת והשונות של  $W$  על סמך התוצאות שהתקבלו בשני הסעיפים הקודמים בלבד.
  - ה. מהו מקדם המתאם בין מספר בקבוקי "מכבי" שנלקחו על ידי קרן, למספר בקבוקים שאינם "מכבי" שנלקחו על ידי קרן?
- (3) במגירה 6 זוגות נעליים. יהודה הוציא מהמגירה 4 נעליים (לא בהכרח זוגות) באקראי. נסמן ב- $W$  את מספר זוגות הנעליים שהוציא יהודה, ונסמן ב- $R$  את מספר הנעליים השמאליות שהוציא יהודה.
- א. מצא את ההתפלגות המשותפת של המשתנים שהוצגו.
  - ב. האם המשתנים שהוצגו בלתי תלויים?
  - ג. מצא את התפלגות מספר הנעליים השמאליות שהוצאו אם בסך הכול הוצא זוג נעלים יחיד על ידי יהודה.
  - ד. אם ידוע שהוצאו לפחות 3 נעליים שמאליות מה הסיכוי שהוצא לכל היותר זוג אחד?

- (4) בכד 5 כדורים כחולים, 4 כדורים לבנים ו-3 כדורים ירוקים. בוחרים באקראי וללא החזרה 3 כדורים. נגדיר את המשתנים הבאים:
- $X$  - מקבל את הערך 1 אם נבחר לפחות כדור אחד כחול, ו-0 אחרת.
  - $Y$  - מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.
- א. חשבו את  $P(X=1)$ .
- ב. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .
- ג. מה התוחלת של  $Y$ , אם ידוע שלא הוצאו כדורים כחולים?
- ד. מה השונות של  $X$ , אם ידוע שהוצא לכל היותר כדור לבן אחד?
- (5) ביום ההולדת הרביעי של טל הוא מחלק שלושה פרסים שונים באקראי ל-5 ילדים. בכל פעם שטל מחלק פרס הוא בוחר באקראי ילד מתוך ה-5 באופן אקראי ובלתי תלוי בבחירות הקודמות. נגדיר את המשתנים הבאים:
- $X$  - מספר הפרסים שקיבלה יוליה.
  - $Y$  - מספר הילדים שלא קיבלו פרס.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת והשוליות של  $X$  ו- $Y$ .
- ב. האם  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי מתואמים?
- ג. מצאו את התוחלת של  $X \cdot Y^2$ .
- ד. מה מקדם המתאם בין מספר הפרסים שקיבלה יוליה, למספר הילדים שקיבלו פרס?
- (6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות. נמקו.
- א. אם שני משתנים הם מתואמים, אזי הם תלויים.
  - ב. אם שני משתנים הם תלויים, אזי הם מתואמים.
  - ג. אם שני משתנים הם בלתי תלויים, אזי הם בלתי מתואמים.
  - ד. אם שני משתנים הם בלתי מתואמים, אזי הם בלתי תלויים.
- (7) במקום עבודה 50 עובדים מתוכם 25 גברים ו-25 נשים. כל עובד נתבקש לבחור מתנה לחג. לכל עובד מוצגות 5 אופציות, מתוכן הוא צריך לבחור אחת. העובדים בוחרים מתנה באקראי ובאופן בלתי תלוי זה בזה.
- נסמן  $X_i$  - מספר הגברים שבחרו במתנה  $i$ .
- נסמן  $Y_i$  - מספר הנשים שבחרו במתנה  $i$ .
- א. האם  $X_1$  ו- $Y_1$  הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.
- ב. האם  $X_1$  ו- $X_2$  הם משתנים בלתי תלויים? אין צורך לחשב רק להסביר.
- ג. מהי ההתפלגות של  $X_1 + X_2$ ?
- ד. האם המתאם בין  $X_1$  ו- $X_2$  מלא או חלקי? חיובי או שלילי? אין צורך לחשב רק להסביר.

(8) הוכיחו את הזהות הבאה עבור שלושת המשתנים:  $X, Y$  ו- $Z$ :

$$\text{cov}(X+Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$$

(9) מספר העלים שנושרים בסתיו מהעץ בגינה מתפלג פואסונית עם תוחלת של 50

עלים בדקה. נסמן ב- $Y$  את מספר העלים שנושרים מהעץ בין 12:00 ל-12:10,

ונסמן ב- $Q$  את מספר העלים שנושרים בין 12:05 ל-12:30.

א. חשבו את:  $\text{cov}(4Y, Q+6)$

ב. מה המתאם בין  $Y$  ל- $Q$ ?

(10) בסל יש 20 כדורים אדומים, 20 ירוקים ו-20 כחולים. מוציאים באקראי

מהסל 20 כדורים. מצאו את מקדם המתאם בין מספר הכדורים האדומים

שהוצאו למספר הכדורים הירוקים שהוצאו.

(11) נתון ש:  $Y \sim B(1, p)$  כאשר  $0 < p < 1$ .

הוכיחו שאם מתקיים:  $P(X=x|Y=0) = P(X=x|Y=1)$  לכל  $X$ ,

אז  $X$  ו- $Y$  הם משתנים בלתי תלויים.

(12) נתון ש- $X \sim B(n, p)$  וכן:  $Y \sim B(m, p)$ , שאינם תלויים זה בזה.

הוכיחו שמתקיים:  $X | X+Y=k \sim HG(n+m, n, k)$ .

## תשובות סופיות:

$$(1) \quad X \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right), Y \sim B\left(2, \frac{1}{5}\right) \quad \text{א.}$$

ב. להלן טבלה: ג. 0.816 ד. 0.816.

| $X / Y$ | 0                | 1                | 2                | 3               | $P_Y$            |
|---------|------------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 0       | $\frac{64}{125}$ | $\frac{16}{125}$ | 0                | 0               | $\frac{80}{125}$ |
| 1       | 0                | $\frac{32}{125}$ | $\frac{8}{125}$  | 0               | $\frac{40}{125}$ |
| 2       | 0                | 0                | $\frac{4}{125}$  | $\frac{1}{125}$ | $\frac{5}{125}$  |
| $P_X$   | $\frac{64}{125}$ | $\frac{48}{125}$ | $\frac{12}{125}$ | $\frac{1}{125}$ | 1                |

$$(2) \quad \text{א. להלן טבלה: ב. } E(X) = \frac{12}{7}, V(X) = \frac{24}{49}, E(Y) = \frac{3}{7}, V(Y) = \frac{12}{49}.$$

| $X / Y$ | 0              | 1               | 2               | 3              | $P_Y$           |
|---------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|-----------------|
| 0       | 0              | $\frac{3}{35}$  | $\frac{12}{35}$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{20}{35}$ |
| 1       | $\frac{1}{35}$ | $\frac{8}{35}$  | $\frac{6}{35}$  | 0              | $\frac{15}{35}$ |
| $P_X$   | $\frac{1}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{4}{35}$ | 1               |

$$\text{ג. } -\frac{8}{49} \quad \text{ד. } E(W) = \frac{6}{7}, V(W) = \frac{20}{49} \quad \text{ה. } -1.$$

(3) א. להלן טבלה: ב. המשתנים תלויים.

| $R / W$ | 0                 | 1                 | 2                | $P_R$             |
|---------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------|
| 0       | $\frac{15}{495}$  | 0                 | 0                | $\frac{15}{495}$  |
| 1       | $\frac{60}{495}$  | $\frac{60}{495}$  | 0                | $\frac{120}{495}$ |
| 2       | $\frac{90}{495}$  | $\frac{120}{495}$ | $\frac{15}{495}$ | $\frac{225}{495}$ |
| 3       | $\frac{60}{495}$  | $\frac{60}{495}$  | 0                | $\frac{120}{495}$ |
| 4       | $\frac{15}{495}$  | 0                 | 0                | $\frac{15}{495}$  |
| $P_W$   | $\frac{240}{495}$ | $\frac{240}{495}$ | $\frac{15}{495}$ | 1                 |

ג. להלן טבלה: ד. 1.

| $R/w=1$    | 1             | 2             | 3             |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| $P(R/w=1)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{1}{4}$ |

(4) א.  $\frac{185}{220}$  ב. להלן טבלה: ג. 1.714 ד. 0.071

| $X/Y$ | 0                | 1                 | $P_Y$             |
|-------|------------------|-------------------|-------------------|
| 0     | $\frac{1}{220}$  | $\frac{55}{220}$  | $\frac{56}{220}$  |
| 1     | $\frac{12}{220}$ | $\frac{100}{220}$ | $\frac{112}{220}$ |
| 2     | $\frac{18}{220}$ | $\frac{30}{220}$  | $\frac{48}{220}$  |
| 3     | $\frac{4}{220}$  | 0                 | $\frac{4}{220}$   |
| $P_X$ | $\frac{35}{220}$ | $\frac{185}{220}$ | 1                 |

(5) א. להלן טבלה: ב.  $X$  ו- $Y$  בלתי מתואמים.

| $X/Y$ | 0                | 1                | 2                | 3               | $P_Y$            |
|-------|------------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|
| 2     | $\frac{24}{125}$ | $\frac{36}{125}$ | 0                | 0               | $\frac{60}{125}$ |
| 3     | $\frac{36}{125}$ | $\frac{12}{125}$ | $\frac{12}{125}$ | 0               | $\frac{60}{125}$ |
| 4     | $\frac{4}{125}$  | 0                | 0                | $\frac{1}{125}$ | $\frac{5}{125}$  |
| $P_X$ | $\frac{64}{125}$ | $\frac{48}{125}$ | $\frac{12}{125}$ | $\frac{1}{125}$ | 1                |

ג. 4.128 ד. 0.

(6) א. נכון. ב. לא נכון. ג. נכון. ד. לא נכון.

- (7) א. בלתי תלויים. ב. תלויים. ג.  $x_1 + x_2 \sim B\left(n = 25, p = \frac{2}{5}\right)$ . ד. חלקי ושלילי.
- (8) שאלת הוכחה.
- (9) א. 1000. ב. 0.316.
- (10) -0.5.
- (11) שאלת הוכחה.
- (12) שאלת הוכחה.