# הסתברות

## פרק 16 - המשתנה המקרי הבדיד- טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

## רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי Y מיוצג ע"י משתנה אקראי X כאשר $a,b$ הם קבועים כלשהם: $Y=aX+b$, אזי מתקיימים:

1) $E(Y)=aE(X)+b$.
2) $V(Y)=a^2\cdot V(X)$.
3) $\sigma_Y=|a|\sigma_x$.

**שלבי העבודה:**

1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה ליניארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי $a$ ו- $b$.
4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15₪.
מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש: $V(X)=68.75=\sigma^2$ , $E(X)=22.5=\mu$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

## שאלות:

**1)** סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.

**2)** תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12.
מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?

**3)** תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?

**4)** X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X)=4$ ו- $V(X)=3$.
Y הינו משתנה מקרי חדש, עבורו: $Y=7-X$. חשבו את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

**5)** אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב).
בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב.
בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב.
אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה.
נסמן ב-X את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.

ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.

מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הנ"ל?

**6)** יהי X מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות.
פונקציית ההסתברות של X נתונה בטבלה הבאה:

| $X$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.3 | | |

כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.

א. השלימו את פונקציית ההסתברות.

ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.

ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה.
מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

**7)** להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X=k)=\frac{k}{A}$ , $k=1,2...4$.

א. מצא את ערכו של $A$.

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את: $E(X^3)$.

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא: $\frac{X}{2}-4$.

## תשובות סופיות:

**1)** תוחלת: 14, שונות: 32.

**2)** תוחלת: 8, שונות: 12.

**3)** תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

**4)** תוחלת: 3, שונות: 3.

**5)** א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות: $85,727.5^2$.

| $X$ | 100 | 50 | 25 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X)$ | 0.001 | 0.02 | 0.05 | 0.929 |

ג. תוחלת: 1650, שונות: $85,727.5^2$.

**6)** ב. $V(X)=1.8275$.

**7)** א. $A=10$. ב. $E(X)=3$ , $V(X)=1$. ג. $E(X^3)=35.4$ , $V(X^3)=616.84$.

ד. $E(Y)=-2.5$ , $V(Y)=0.25$.


© כל הזכויות שמורות לברק קנדל