

# הסתברות

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד - טרנספורמציה לינארית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## המשתנה המקרי הבדיד – טרנספורמציה לינארית:

### רקע:

טרנספורמציה לינארית היא מצב שבו מבצעים הכפלה של קבוע ו/או הוספה של קבוע על המשתנה המקורי (כולל גם חלוקה של קבוע והחסרה של קבוע).

בניסוח מתמטי נאמר כי אם משתנה אקראי  $Y$  מיוצג ע"י משתנה אקראי  $X$  כאשר  $a, b$  הם קבועים כלשהם:  $Y = aX + b$ , אזי מתקיימים:

$$E(Y) = aE(X) + b \quad (1)$$

$$V(Y) = a^2 \cdot V(X) \quad (2)$$

$$\sigma_Y = |a| \sigma_X \quad (3)$$

### שלבי העבודה:

- (1) נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
- (2) נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
- (3) נפשט את הכלל ונזהה את ערכי  $a$  ו- $b$ .
- (4) נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה – הרולטה:

בהמשך לנתוני שאלת הרולטה נתון שעלות השתתפות במשחק 15 ₪. מהי התוחלת והשונות של הרווח במשחק?

פתרון (בהקלטה):

חישבנו קודם ש:  $V(X) = 68.75 = \sigma^2$ ,  $E(X) = 22.5 = \mu$ .

## שאלות:

- (1) סטודנט ניגש ל-5 קורסים הסמסטר. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשבו את התוחלת והשונות של סך הנקודות שיצבור הסטודנט כאשר נתון שתוחלת מספר הקורסים שיסיים היא 3.5 עם שונות 2.
- (2) תוחלת סכום הזכייה במשחק מזל הינה 10 עם שונות 3. הוחלט להכפיל את סכום הזכייה במשחק. עלות השתתפות במשחק הינה 12. מה התוחלת ומהי השונות של הרווח במשחק?
- (3) תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן להעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
- (4)  $X$  הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$  ו- $V(X) = 3$ .  $Y$  הינו משתנה מקרי חדש, עבורו:  $Y = 7 - X$ . חשבו את:  $E(Y)$  ו- $V(Y)$ .
- (5) אדם החליט לבטח את רכבו; שווי הרכב 100,000 ₪. להלן התביעות האפשריות והסתברותן: בהסתברות של 0.001 תהיה תביעה טוטאלוסט (כל שווי הרכב). בהסתברות של 0.02 תהיה תביעה בשווי מחצית משווי הרכב. בהסתברות של 5% תהיה תביעה בשווי רבע משווי הרכב. אחרת אין תביעה בכלל. החברה מאפשרת תביעה אחת בשנה. נסמן ב- $X$  את גובה התביעה השנתית, באלפי ₪.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .
- ב. חשבו את התוחלת והשונות של גובה התביעה.
- ג. פרמיית הביטוח היא 4,000 ₪.
- מהי התוחלת ומהי השונות של רווח חברת הביטוח לביטוח הרכב הני"ל?
- (6) יהי  $X$  מספר התשובות הנכונות במבחן בו 10 שאלות. פונקציית ההסתברות של  $X$  נתונה בטבלה הבאה:

|    |   |     |     |     |     |        |
|----|---|-----|-----|-----|-----|--------|
| 10 | 9 | 8   | 7   | 6   | 5   | $X$    |
|    |   | 0.3 | 0.2 | 0.2 | 0.1 | $P(X)$ |

- כמו כן, נתון שצפי מספר התשובות הנכונות בבחינה הוא 7.35.
- א. השלימו את פונקציית ההסתברות.
- ב. חשבו את השונות מספר התשובות הנכונות בבחינה.
- ג. הציון בבחינה מחושב באופן הבא:
- כל שאלה נכונה מזכה ב-10 נקודות. לכל שאלה שגויה, מופחתת נקודה. מהי התוחלת ומה השונות של הציון בבחינה?

(7) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו:  $k=1,2,3,4$  :  $P(X=k) = \frac{k}{A}$

א. מצא את ערכו של  $A$ .

ב. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הנחקר.

ג. חשב את:  $E(X^3)$ .

ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה הבא:  $\frac{X}{2} - 4$ .

### תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 14, שונות: 32.

(2) תוחלת: 8, שונות: 12.

(3) תוחלת: 13.2, סטיית תקן: 5.5.

(4) תוחלת: 3, שונות: 3.

(5) א. להלן טבלה: ב. תוחלת: 2350, שונות:  $85,727.5^2$ .

|       |      |      |       |        |
|-------|------|------|-------|--------|
| 0     | 25   | 50   | 100   | $X$    |
| 0.929 | 0.05 | 0.02 | 0.001 | $P(X)$ |

ג. תוחלת: 1650, שונות:  $85,727.5^2$ .

(6) ב.  $V(X) = 1.8275$ .

(7) א.  $A=10$  ב.  $E(X)=3, V(X)=1$  ג.  $E(X^3)=35.4, V(X^3)=616.84$

ד.  $E(Y)=-2.5, V(Y)=0.25$ .