

# תורת ההסתברות

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד - תוחלת - שונות וסטיית תקן

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## המשתנה המקרי הבדיד – תוחלת, שונות וסטיית תקן:

**רקע:**

**תוחלת:**

ממוצע של פונקציית ההסתברות, אם נבצע את התהליך אינסוף פעמים כמה בממוצע נקבל. התוחלת היא צפי של המשתנה המקרי.

$$\text{מגדירים תוחלת באופן הבא: } E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = \mu$$

**שונות:**

תוחלת ריבועי הסטיות מהתוחלת – נותן אינדיקציה על הפיזור והסיכון של פונקציית ההסתברות.

$$\text{מגדירים שונות באופן הבא: } V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) = \sum_i x_i^2 P(x_i) - \mu^2 = \sigma^2$$

**סטיית תקן:**

שורש של השונות – הפיזור הממוצע הצפוי סביב התוחלת. מסמנים:  $STD = \sigma$ .

**דוגמה:**

בקזינו רולטה כמוראה בשרטוט. אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה ב-ש. הסתברות לקבלת הסכומים השונים:



|     |      |      |        |
|-----|------|------|--------|
| 30  | 20   | 10   | $X$    |
| 0.5 | 0.25 | 0.25 | $P(X)$ |

$$E(X) = 10 \cdot 0.25 + 20 \cdot 0.25 + 30 \cdot 0.5 = 22.5 = \mu$$

$$V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 P(x_i) =$$

$$= (10 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (20 - 22.5)^2 \cdot 0.25 + (30 - 22.5)^2 \cdot 0.5 = 68.75 = \sigma^2$$

$$\text{כדי לחשב את סטיית התקן נוציא שורש לשונות: } \sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{68.75} = 8.29$$

## שאלות:

- (1) אדם משחק במשחק מזל.  
נגדיר את  $X$  להיות סכום הזכייה.  
להלן פונקציית ההסתברות של  $X$ :

|     |     |     |     |        |
|-----|-----|-----|-----|--------|
| 40  | 20  | 0   | -30 | $X$    |
| 0.2 | 0.3 | 0.1 | 0.4 | $P(X)$ |

מהי התוחלת, השונות וסטית התקן של  $X$ ?

- (2) בישוב מסוים שני סניפי בנק: בנק פועלים ובנק לאומי. מתוך האוכלוסייה הבוגרת בישוב, ל-50% חשבון בנק בסניף הפועלים, ל-40% חשבון בנק בסניף לאומי ול-20% מהתושבים הבוגרים אין חשבון באף אחד מהסניפים. יהי  $X$  מס' סניפי הבנק שלבוגר בישוב יש בהם חשבון. חשבו את:  $E(X)$ .

- (3) ידוע של-20% מהמשפחות יש חיבור לווייני בביתם. בסקר אדם מחפש לראיין משפחה המחוברת ללוויין. הוא מטלפן באקראי למשפחה וממשיך עד אשר הוא מגיע למשפחה המחוברת ללוויין. בכל מקרה הסוקר לא יתקשר ליותר מ-5 משפחות. נגדיר את  $X$  להיות מספר המשפחות שאליו האדם יתקשר. א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .  
ב. חשבו את התוחלת וסטית התקן של  $X$ .

- (4) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי שלא ישתמש בו שוב. נסמן ב- $X$  את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח. א. בנו את פונקציית ההסתברות של  $X$ .  
ב. חשבו את התוחלת והשונות של  $X$ .

(5) נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי  $X$ :

|     |   |     |   |        |
|-----|---|-----|---|--------|
| 8   | 6 | 4   | 2 | $X$    |
| 0.2 |   | 0.3 |   | $E(X)$ |

כמו כן נתון ש:  $E(X) = 4.2$ .

א. מצאו את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשבו את:  $V(X)$ .

(6) משתנה מקרי בדיד מקבל את הערכים 5-0 ו-5. נתון שהתוחלת של המשתנה 0 ושהשונות היא 10. מצא את פונקציית ההסתברות.

(7) להלן ההתפלגות של משתנה מקרי:

| $X$ | $P$           |
|-----|---------------|
| 1   | $\frac{1}{4}$ |
| 3   | $\frac{1}{2}$ |
| $K$ | $\frac{1}{4}$ |

מהו הערך שייתן ערך מינימלי לשונות של  $X$ ?

## תשובות סופיות:

(1) תוחלת: 2, שונות: 796.

(2) 0.9.

(3) א. ראו סרטון. ב. תוחלת: 3.36, סטיית תקן: 1.603.

(4) א. ראו טבלה: ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

|     |     |     |     |     |        |
|-----|-----|-----|-----|-----|--------|
| 5   | 4   | 3   | 2   | 1   | $X$    |
| 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0.2 | $P(X)$ |

(5) א. ראו טבלה: ב. 5.16.

|     |     |     |     |        |
|-----|-----|-----|-----|--------|
| 8   | 6   | 4   | 2   | $X$    |
| 0.2 | 0.1 | 0.3 | 0.4 | $P(X)$ |

(6) ראו טבלה:

|     |     |     |        |
|-----|-----|-----|--------|
| 5   | 0   | -5  | $X$    |
| 0.2 | 0.6 | 0.2 | $P(X)$ |

(7) 2.33.