תהליכים אקראיים בפיזיקה

פרק 27 - המשתנה המקרי הבדיד - שאלות מסכמות

תוכן העניינים

1. כללי 1

המשתנה המקרי הבדיד – שאלות מסכמות:

שאלות:

1) נתון כי: $X \sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$, $Y \sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$.

א. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של X.

ב. $W = 2X - 4$, חשבו את התוחלת וסטיית התקן של W.

ג. $T = X + Y$, חשבו את התוחלת של T.
האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T?

2) ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים, בכל מכונה משחק אחד (במכונה א' ובמכונה ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א' הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומהי השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3) לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב.
נסמן ב-X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן הכולל לפתיחת הדלת?

4) מספר התקלות בשידור "ערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי X מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתיחתה ביום א' בבוקר, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ (כולל).
מהי פונקציית ההסתברות של X?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים מתוצרת חוץ שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

6) חברת הפקות של סרטים הפיקה 3 סרטים, אשר הופקו לטלוויזיה המקומית. חברת ההפקות מנסה למכור את הסרטים הללו לחו"ל.
להלן ההסתברויות למכירת הסרטים לחו"ל:
הסרט "הצבי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.6.
הסרט "לעולם לא" יימכר לחו"ל בסיכויי של 0.7.
הסרט "מוות פתאומי" יימכר לחו"ל בסיכוי של 0.2.
ידוע כי כל סרט עלה להפקה חצי מיליון שקלים. כמו כן, כל סרט הביא להכנסה של 200,000 שקלים מהטלוויזיה המקומית. במידה וסרט יימכר לחו"ל, כל סרט יימכר ב-600,000 שקלים.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הסרטים שיימכרו לחו"ל.

ב. מהי התוחלת והשונות של מספר הסרטים שיימכרו?

ג. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של הרווח (במאות אלפי שקלים) של חברת ההפקה?

7) במפעל מייצרים סוכריות כך ש-20% מהסוכריות בטעם תות. הייצור הוא ייצור המוני. שאר הסוכריות בטעמים שונים, השקיות נארזות ובכל שקית בדיוק 5 סוכריות.

א. נבחרה שקית ונתון שבשקית פחות מ-3 סוכריות אדומות.
מה ההסתברות שבשקית סוכריה אדומה אחת?

ב. בוחרים באקראי שקית אחר שקית, במטרה למצוא שקית ללא סוכריות אדומות. מה ההסתברות שייאלצו לדגום יותר מ-6 שקיות?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

8) מבחן בנוי משני חלקים: בחלק א' 10 שאלות ובחלק ב' 10 שאלות. תלמיד התכונן רק לחלק א' של המבחן ובחלק זה בכל שאלה יש סיכוי של 0.8 שיענה נכון, בחלק השני לכל שאלה יש 4 תשובות כשרק אחת נכונה. בחלק זה הוא מנחש את התשובות.

א. מהי ההסתברות שבחלק הראשון הוא יענה נכון על 7 שאלות בדיוק?

ב. מהי ההסתברות שבחלק השני הוא יענה נכון על פחות מ-3 שאלות?

ג. מה התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בחלק הראשון?

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר התשובות הנכונות בבחינה כולה?

9) יהי X משתנה מקרי המקיים: $E(X)=2$ וכן: $V(X)=1$.

חשבו: $E(X-5)^2$.

10) הסיכוי לעבור מבחן נהיגה הינו P. בוחרים באקראי ארבעה נבחנים.

ההסתברות ששניים מהם יעברו את מבחן הנהיגה גבוה פי $\frac{8}{3}$ מהסיכוי שכל הארבעה יעברו את המבחן.

א. חשבו את ערכו של P.

ב. תלמיד ניגש לבחינה עד אשר הוא עובר אותה.
מה ההסתברות שיעבור את מבחן הנהיגה רק במבחן הרביעי?

ג. מה ההסתברות שיאלץ לגשת לפחות לחמישה מבחנים בסך הכול?

ד. מה התוחלת ומהי השונות של מספר המבחנים שבהם יכשל?

ה. ידוע שהתלמיד ניגש לשלושה מבחנים ועדיין לא עבר. מה ההסתברות שבסופו של דבר יעבור במבחן הנהיגה החמישי?

11) רובוט נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. הרובוט מבצע n צעדים ובכל צעד הוא נע בסיכוי P. ימינה ביחידה אחת ובסיכוי $1-P$ שמאלה ביחידה אחת.
נסמן ב- X את המספר עליו עומד הרובוט לאחר n צעדים.
רשמו את פונקציית ההסתברות של X באמצעות P ו- n.

12) למטבע יש סיכוי P לקבל את התוצאה ראש. מטילים את המטבע. אם יוצא ראש בפעם הראשונה מפסידים שקל ומפסיקים את המשחק. אחרת, ממשיכים לזרוק וזוכים במספר שקלים לפי מספר הפעמים שהטלנו את המטבע מההתחלה ועד שהתקבל ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של רווח המשחק (באמצעות P).

ב. בטאו את תוחלת הרווח באמצעות P.

ג. לאלו ערכי P המשחק כדאי?

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

13) מטבע הוגן מוטל עד שמתקבל $m+1$ פעמים עץ.
רשמו את פונקציית ההסתברות של מספר הפעמים שהתקבל פלי.

14) נתונות N מגירות ממוספרות מ-1 ועד N. מתוך n חולצות, יש לבחור באופן אקראי לכל חולצה מגירה. כל מגירה יכולה להכיל את כל החולצות.
נגדיר את X_1 - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר 1.
נגדיר את X_N - כמספר החולצות שהונחו במגירה מספר N.
חשבו את: $V\left(X_1+X_N\right)$.

15) n אנשים יושבים במסעדה. בזמן שמגיע העת לשלם, האנשים פועלים לפי העיקרון הבא: כל אחד מהם מטיל מטבע הוגן עד אשר אחד מהם מקבל תוצאה שונה מכל השאר והוא זה שמשלם.
מהי תוחלת מספר הסבבים שיבוצעו עד שימצא משלם?

16) הסיכוי לעבור בקורס מסוים את מועד א' הוא 0.7. סטודנט שנכשל במועד א' בהכרח ניגש למועד ב' ואז הסיכוי שלו לעבור אותו הוא 0.8. אם סטודנט נכשל במועד ב' הוא ניגש למועד מיוחד ואחרון.
נתון שלמועד א' נגשו כל 20 הסטודנטים הרשומים לקורס.
מהי התפלגות מספר הבחינות שיאלץ המרצה לחבר?

17) לקניון 3 כניסות שונות. בכל כניסה מספר האנשים שנכנסים לקניון מתפלג פואסונית באופן בלתי תלוי בכניסה האחרת. מספר האנשים שנכנסים בכניסה ה-i מתפלג פואסונית עם קצב של i אנשים בשנייה.
יהי Y מספר האנשים שנכנסים לקניון בשנייה מכל הכניסות יחדיו.
מצאו את: $E\left[\frac{1}{Y+1}\right]$.

18) לרני 20 טושים אותם הוא מכניס באקראי ל-3 קלמרים. לכל טוש נבחר קלמר באקראי ובאופן בלתי תלוי בטוש אחר. כל קלמר יכול להכיל עד 20 טושים.
נסמן ב-X את מספר הקלמרים שיש בהם בדיוק 10 טושים.
חשבו את $E\left(\sqrt{x+7}\right)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

19) בשדרות רוטשילד החליטו לשתול n ברושים ו-2 אורנים אחד אחרי השני בשורה. סידור העצים בשורה נעשה באקראי. נגדיר את X להיות מספר הברושים, בין הברוש הגבוה ביותר לברוש הנמוך ביותר שנשתלו.

א. מצאו את ההתפלגות של X.

ב. הוכיחו שהתוחלת של X היא $\frac{n-2}{3}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

תשובות סופיות:

1) א. תוחלת: 2, סטיית תקן: 1.
ב. תוחלת: 0, סטיית תקן: 2.
ג. תוחלת: 4.5, סטיית תקן: לא ניתן.

2) א. 0.03.
ב. תוחלת: 0.15, שונות: 0.1875.
ג. 0.1328.

3) א. ראו טבלה:
ב. תוחלת: 3, שונות: 2.

x	1	2	3	4	5
$P(x)$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

ג. תוחלת: 1.5, שונות: 0.5.

4) א. 0.9975. ב. 0.0172. ג. 1.0025.

5) א. 0.375. ב. 0.6. ג. 0.282. ד. 0.282.

6) א. ראו טבלה:
ב. תוחלת: 1.5, שונות: 0.61.

x	0	1	2	3
$P(x)$	0.092	0.392	0.428	0.084

ג. תוחלת: 0, סטיית תקן: 4.68.

7) א. 0.4348. ב. 0.0923.

8) א. 2.013. ב. 0.5256. ג. תוחלת: 8, שונות: 1.6.
ד. תוחלת: 10.5, שונות: 3.475.

9) 10.

10) א. 0.6. ב. 0.0384. ג. 0.0256.
ד. תוחלת: 0.67, שונות: 1.11. ה. 0.24.

11) $P(X=k)=\binom{n}{\frac{k+n}{2}}\cdot p^{\frac{k+n}{2}}\cdot(1-p)^{\frac{n-k}{2}}$.

12) א. $P(X=k)=\begin{matrix}P & k=-1\\ (1-P)^{K-1}\cdot P & k=2,3,...,\infty\end{matrix}$.
ב. $\frac{1-2p^2}{p}$.
ג. $0<p<\sqrt{\frac{1}{2}}$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

13) $P(X=k)=\binom{m+k}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+m+1}$, $k=0,1,...,\infty$.

14) $n\cdot\left(\frac{2}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)$.

15) $\frac{2^n}{2n}$.

16) ראו טבלה:

X	1	2	3
$P(X)$	0.0008	0.2893	0.7099

17) $\frac{e^{-6}}{6}\left[e^6-1\right]$.

18) 2.675.

19) א. $P(X=k)=\frac{n-k-1}{\binom{n}{2}}$, $k=0,1,...,n-2$. ב. הוכחה.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל