תהליכים אקראיים בפיזיקה

פרק 18 - המשתנה המקרי הבדיד -תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד

תוכן העניינים

1. ראשי 1

תוחלת של פונקציה של משתנה מקרי בדיד:

רקע:

יהי X משתנה מקרי, ותהי $g(X)$ פונקציה של X. אז:

$$E\left(g\left(X\right)\right)=g\left(x_1\right)P\left(X=x_1\right)+g\left(x_2\right)P\left(X=x_2\right)+g\left(x_3\right)P\left(X=x_3\right)+\cdots$$

$$=\sum_i g\left(x_i\right)\cdot P\left(x_i\right)$$

כאשר $x_1,x_2,x_3,\ldots$ הם הערכים שהמשתנה X מקבל.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון:

X	0	1	2
$P(X)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

מצאו התפלגות ותוחלת של: $Y=X^2$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

שאלות:

1) מסובבים רולטה עליה המספרים 1 עד 4.
יהיה X המספר שהתקבל לאחר סיבוב הרולטה.
התפלגות X היא כדלהלן:

X	4	3	2	1
$P(X)$	0.3	0.4	0.2	0.1

א. חשבו את: $E(X)$, $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

ב. האם: $E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{1}{E(X)}$?

2) יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית ההסתברות הבאה:

2	1	0	X
0.75	0.20	0.05	$P(X)$

חשבו את התוחלת של:

א. X^2.

ב. 2^X.

3) להלן פונקציית הסתברות של משתנה מקרי כלשהו: $P(X=k)=\frac{k}{A}$, $k=1,2...4$.

א. מצאו את ערכו של A.

ב. חשבו את: $E\left(\left[X-E(X)\right]^2\right)$.

4) בכל יום משחק ערן משחק יחיד בכל אחת מהאפליקציות הבאות: TWODOTS ו- PIANOTILES. בכל אחד מהמשחקים ישנם שלבים שיש לעבור. משחק בודד מסתיים בהצלחה אם ערן עבר את שלב, ובכישלון אם ערן לא עבר את השלב.
ההסתברות שבאפליקציית TWODOTS ערן יעבור שלב היא 0.6 בכל יום.
ההסתברות שבאפליקציית PIANOTILES ערן יעבור שלב היא 0.35 בכל יום.
נניח שמעבר שלב בכל אחד מהמשחקים בלתי תלוי במשחק אחר.
נסמן ב- W את מספר המשחקים שערן יעבור שלב בהם מחר.

א. חשבו את $E(W)$.

ב. חשבו את $E\left(W^3\right)$.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל

5) יהי X משתנה מקרי בדיד עם תוחלת ושונות סופיים: $Y=aX+b$, כאשר $a\neq 0$.
a,b הינם פרמטרים. יש להוכיח ש: $E(Y)=aE(X)+b$, $V(Y)=a^2\cdot V(X)$.

6) אלעד צופה בסדרה בת 6 פרקים. 3 פרקים מתוך ה-6 הם פרקים שצולמו בישראל ו-3 פרקים אחרים צולמו בבולגריה. פרק אחד מבין הפרקים שצולמו בבולגריה מצולם כולו ביער. אלעד צופה בפרקי הסדרה בסדר אקראי, עד אשר הוא מגיע לפרק שצולם ביער בבולגריה. נגדיר את W כמספר הפרקים שצולמו בבולגריה שבהם יצפה אלעד.

א. מהי התפלגות W?

ב. חשבו: $E(W^3)$.

7) למיקה יש 20 חולצות ו-3 מגירות. כאשר מיקה מסדרת את 20 החולצות במגירות היא בוחרת עבור כל חולצה, באופן מקרי ובלתי תלוי בחולצות האחרות, את המגירה אליה תכניס את החולצה (כל אחת מהמגירות יכולה להכיל את כל החולצות).
נסמן ב-X את מספר המגירות המכילות בדיוק 10 חולצות.
מצאו את התפלגות X ואת: $E\left(\sqrt{X+2}\right)$.

8) מטבע מוטל 10 פעמים. X = מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש.

א. בנו את פונקציית ההסתברות של X.

ב. הרווח במשחק הוא 4^X. מצאו את התוחלת של הרווח במשחק.

רמז: היעזרו בבינום של ניוטון: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.

תשובות סופיות:

1) א. $E(X)=2.9$, $E\left(\frac{1}{X}\right)=0.4083$. ב. לא.

2) א. 3.2. ב. 3.45.

3) א. 10. ב. 1.

4) א. 0.95. ב. 2.21.

5) הוכחה.

6) א. $X\sim U(1,3)$. ב. 12.

7) $E\left(\sqrt{X+2}\right)=1.4659$.

8) א. $X\sim B(10,0.5)$. ב. 2.5^{10}.

© כל הזכויות שמורות לברק קנדל