חדווא 1

פרק 28 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי חישוב 1
2. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי תיאוריה 4
3. משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים 7

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות **1** ו-**2**, על סמך המשפט היסודי של החדו"א,
הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו-$b(x)$ גזירות, אזי:

1) $$I(x)=\int_{a}^{b(x)} f(t)dt \quad\Rightarrow\quad I'(x)=f(b(x))b'(x)$$

2) $$I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \quad\Rightarrow\quad I'(x)=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות **3-6**:

3) $I(x)=\int_{2}^{x} e^{-t^2}dt$

4) $I(x)=\int_{1}^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}dt$

5) $I(x)=\int_{2}^{x^3+x} t\ln t dt$

6) $I(x)=\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **9-7**:

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$

9) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_{4}^{x}e^{t^2}dt$

10) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\int_{0}^{x}e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{0}^{x}e^{2t^2}dt}$.

11) חקרו את הפונקציה $F(x)=\int_0^x (t+1)^4(t-1)^{10}dt$, לפי הפירוט הבא:
תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12) נתונה הפונקציה $g(t)=\int_0^{t^2-1} f(x)dx$, כאשר $f(x)=2+\int_0^x \left(e^{y^2}+2\right)^2 dy$.
חשבו את $g''(1)$ (הניחו כי f רציפה).

13) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $g''(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

14) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha\neq 0$.
נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\left[\alpha(x-t)\right]dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הוכיחו כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

15) תהי f פונקציה רציפה וחיובית לכל $x\geq 0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x t\,f(t)dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\infty)$.

16) מצאו את $\int_e^4 f(x)dx$, אם נתון כי $\int_2^x \frac{t^3-t+2}{t^2-t}dt=\int_2^x f(t)dt+2\int_2^x \frac{1}{t-1}dt$.

17) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$, בנקודה $x_0=2\pi$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) שאלת הוכחה.

3) $I'(x)=e^{-x^2}$

4) $I'(x)=\frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2$

5) $I'(x)=(x^3+x)(3x^2+1)\ln(x^3+x)$

6) $I'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

7) $\frac{1}{2}$

8) $\frac{2}{3}$

9) $4e^{16}$

10) 0

11) תחום הגדרה: כל x.
נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל x.
נקודות פיתול: $x=-1,1,-\frac{3}{7}$.
תחומי קמירות: $x>1$, $-1<x<-\frac{3}{7}$.
תחומי קעירות: $-\frac{3}{7}<x<1$, $x<-1$.

12) 40

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) $14-2\ln 4-\frac{1}{2}e^2-e$

17) $y=x-2\pi$

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי תיאוריה

שאלות

1) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[0,2]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x\le 2\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

2) נתונה הפונקציה f המוגדרת בקטע $[-1,1]$ כך: $f(x)=\begin{cases}0 & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקטע הנתון.

ב. מצאו את $F(x)=\int\limits_{-1}^x f(t)dt$ לכל x בקטע הנתון.

ג. בדקו האם $F(x)$ רציפה/גזירה בקטע.

ד. האם $F'(x)=f(x)$?

3) נגדיר $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

נגדיר $F:[-1,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2} & ;\ x\ne 0\\ 0 & ;\ x=0\end{cases}$.

הוכיחו כי $F'=f$ ב- $[-1,1]$, אבל $\int_{-1}^1 f(t)dt$ לא קיים.

האם הדבר עומד בסתירה למשפט היסודי של החדו"א?

4) נתונה פונקציה אינטגרבילית $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\int_a^b f(t)dt=\lim\limits_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$.

GOOL בשביל התירגול

5) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(t)dt>1$.
הוכיחו שקיים x_1, בקטע (a,b), עבורו $\int_a^{x_1} f(t)dt=1$.

6) תהי f פונקציה רציפה ומחזורית לכל x, עם מחזור p.
הוכיחו שלאינטגרל $\int_x^{x+p} f(t)dt$ יש את אותו הערך לכל $x\in\mathbb{R}$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הראו כי הפונקציה $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$ קבועה בקטע $(0,\infty)$,
ומצאו את הקבוע הממשי C עבורו מתקיים $f(x)=C$ לכל $x\in(0,\infty)$.
ב. הוכיחו כי $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ לכל $x>0$.

8) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ונניח כי $\int_0^1 f(x)dx=1$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,1)$, כך ש- $f(c)=3c^2$.

9) תהי f פונקציה רציפה ב- $[0,\pi/2]$ ונניח כי $\int_0^{\pi/2} f(t)dt=0$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(0,\pi/2)$, כך ש- $f(c)=2\cos 2c$.

10) תהי $f:[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו שקיים $c\in[0,\pi/4]$, כך ש- $f(c)=2\cos 2c\int_0^{\pi/4} f(t)dt$.

11) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה.
הוכיחו שקיים $c\in(0,1)$, כך ש- $\int_0^1 f(x)dx=f(0)+\frac{1}{2}f'(c)$.

12) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נניח כי $\forall x\in[a,b]\;\; \int_a^x f(t)dt=\int_x^b f(t)dt$.
הוכיחו כי $\forall x\in[a,b]\;\; f(x)=0$.

13) תהי f פונקציה רציפה ב-$[a,b]$, ונניח כי קיימות שתי נקודות, $x_1 < x_2$,
בקטע (a,b), שעבורן מתקיים $\int_a^{x_2} f(t)dt = \int_a^{x_1} f(t)dt$.

א. הוכיחו כי קיים c, בקטע (a,b), כך ש-$f(c)=0$.

ב. האם הטענה שבסעיף א' נכונה גם אם לא נדרוש ש-f רציפה ב-$[a,b]$,
ונסתפק בדרישה החלשה יותר, ש-f אינטגרבילית ב-$[a,b]$? נמקו.

14) מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)=e^{-|x|}$.

15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$,
ונניח שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=\int_0^x f(t)dt$.
הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=0$).

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1\\ x-1 & 1<x\le 2\end{cases}$ ג. רציפה ולא גזירה.
ד. לא.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $F(x)=0$ לכל x בקטע הנתון. ג. רציפה וגזירה.
ד. לא.

7) א. $C=0$ ב. שאלת הוכחה.

14) $F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+D+2 & x\ge 0\\ e^{x}+D & x<0\end{cases}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

שאלות

1) בסרטון התיאוריה הוכחנו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.
נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע לאינטגרלים בעזרת משפט הערך הממוצע של לגראנז'.

2) תהי f רציפה ב-$[a,b]$, ו-$\int_a^b f(x)dx=1$.
הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $(b-a)f(x)=1$.

3) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $a\le x_1<x_2\le b$
וכי $\int_a^{x_2} f(t)dt=\int_a^{x_1} f(t)dt$.
הוכיחו שקיים x, בקטע (a,b), שעבורו $f(x)=0$.

4) הוכיחו, ללא חישוב האינטגרל, כי $\frac{1}{n}>\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

5) תהי f פונקציה רציפה ויורדת בקטע $[n,n+1]$.
הוכיחו כי $f(n+1)<\int_n^{n+1} f(x)dx<f(n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

6) יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות המקיימות $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.
הוכיחו שקיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש- $f(c)=g(c)$.

7) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x^n)dx=f(0)$.

8) תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נתון כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$.
הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=a$.

9) חשבו את הערך הממוצע של הפונקציה $f(x)=\sin x\sin(x+\alpha)$ בקטע $[0,2\pi]$.

10) ניזכר במשפט הערך הממוצע לאינטגרלים.
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$
הראו שהמשפט לעיל אינו נכון, אם נחליף את דרישת הרציפות בדרישה לאינטגרביליות.

11) הוכח כי $\frac{6}{\ln 2}\le\int_2^4\frac{x}{\ln x}dx\le\frac{3}{\ln 2}$.

12) הוכח כי $\frac{2\pi^2}{9}\le\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\le\frac{\pi^2}{9}$.

13) הוכח כי $\frac{1}{2}\ln 2\le\int\limits_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan x dx\le\frac{1}{2e}\ln 2$.

14) תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
הוכח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=0$.

15) נסחו והוכיחו את משפט הערך הממוצע האינטגרלי השני.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il