

חדו"א ד

פרק 18 - המשפט היסודי של החדו"א

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו"א - תרגילי חישוב

המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

שאלות

בשאלות 1 ו-2, על סמך המשפט היסודי של החדו"א, הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה ו גם $a(x)$ ו- $b(x)$ גזירות, אז:

$$I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) \quad (1)$$

$$I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x) \quad (2)$$

גזרו את הפונקציות בשאלות 3-6:

$$I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (4)$$

$$I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (3)$$

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (6)$$

$$I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (5)$$

חשבו את הגבולות בשאלות 7-9:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (7)$$

$$(10) \text{ חשבו את הגבול} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$$

11) חקרו את הפונקציה $F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

12) נתונה הפונקציה $f(x) = 2 + \int_0^x (e^{y^2} + 2)^2 dy$, כאשר $g(t) = \int_0^{t^2-1} f(x) dx$.
חשבו את $(g''(x))$ (הוכיחו כי f רציפה).

13) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
נגיד $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$ לכל
הוכיחו כי $(g'(x)) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

14) תהי $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, וכי $\alpha \neq 0$.
נגיד $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x f(t) \sin[\alpha(x-t)] dt$ לכל
הוכיחו כי $(g''(x)) = g''(x) + \alpha^2 g(x)$

15) תהי f פונקציה רציפה וחיוונית לכל $x \geq 0$.
 $z(x) = \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x t f(t) dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0, \infty)$.
הוכיחו כי הפונקציה

16) מצאו את $\int_2^x \frac{t^3 - t + 2}{t^2 - t} dt = \int_2^x f(t) dt + 2 \int_2^x \frac{1}{t-1} dt$, אם נתנו כי $\int_e^4 f(x) dx$

17) מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x) = \int_0^{\sin x} e^{t^2} dt$, בנקודת 2π

תשובות סופיות

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

$$I'(x) = e^{-x^2} \quad (3)$$

$$I'(x) = \frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2} \cdot 3x^2 \quad (4)$$

$$I'(x) = (x^3 + x)(3x^2 + 1)\ln(x^3 + x) \quad (5)$$

$$I'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2} \quad (7)$$

$$\frac{2}{3} \quad (8)$$

$$4e^{16} \quad (9)$$

$$0 \quad (10)$$

(11) תחומי הגדרה : כל x .

נקודות קיצון : אין קיצון, עולה לכל x .

$$\text{נקודות פיתול : } x = -1, 1, -\frac{3}{7}$$

. $-1 < x < -\frac{3}{7}$, $x > 1$ תחומי קמירות :

. $x < -1$, $-\frac{3}{7} < x < 1$ תחומי עיריות :

$$40 \quad (12)$$

(13) שאלת הוכחה.

(14) שאלת הוכחה.

(15) שאלת הוכחה.

$$14 - 2\ln 4 - \frac{1}{2}e^2 - e \quad (16)$$

$$y = x - 2\pi \quad (17)$$