# קלקולוס 1

## פרק 20 - המשפט היסודי של החדו"א, משפטי הערך הממוצע לאינטגרלים

תוכן העניינים

1. המשפט היסודי של החדו״א - תרגילי חישוב . . . . . 1

# המשפט היסודי של החדו"א – תרגילי חישוב

## שאלות

בשאלות **1** ו-**2**, על סמך המשפט היסודי של החדו״א,
הוכיחו כי אם $f(x)$ רציפה וגם $a(x)$ ו-$b(x)$ גזירות, אזי:

**1)** $I(x)=\int_{a}^{b(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad I'(x)=f\left(b(x)\right)b'(x)$

**2)** $I(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad I'(x)=f\left(b(x)\right)b'(x)-f\left(a(x)\right)a'(x)$

גזרו את הפונקציות בשאלות **3-6**:

**3)** $I(x)=\int_{2}^{x} e^{-t^2}dt$

**4)** $I(x)=\int_{1}^{x^3} \frac{\ln t}{t^2}dt$

**5)** $I(x)=\int_{2}^{x^3+x} t\ln t dt$

**6)** $I(x)=\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **7-9**:

**7)** $\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}\frac{tdt}{\cos t}}{\sin^2 x}$

**8)** $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3}\int_{0}^{x^2}\sin\sqrt{t}dt$

**9)** $\lim_{x\to 4}\frac{x}{x-4}\int_{4}^{x} e^{t^2}dt$

**10)** חשבו את הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_{0}^{x} e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{0}^{x} e^{2t^2}dt}$.

**11)** חקרו את הפונקציה $F(x)=\int_0^x (t+1)^4(t-1)^{10}dt$, לפי הפירוט הבא:

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

**12)** נתונה הפונקציה $g(t)=\int_0^{t^2-1} f(x)dx$, כאשר $f(x)=2+\int_0^x \left(e^{y^2}+2\right)^2 dy$.

חשבו את $g''(1)$ (הניחו כי $f$ רציפה).

**13)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

נגדיר $g(x)=\int_0^x (x-t)f(t)dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $g''(x)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

**14)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ויהי $\alpha\neq 0$.

נגדיר $g(x)=\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\sin\left[\alpha(x-t)\right]dt$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $f(x)=g''(x)+\alpha^2 g(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

**15)** תהי $f$ פונקציה רציפה וחיובית לכל $x\geq 0$.

הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x t\,f(t)dt}$ מונוטונית יורדת בקטע $[0,\infty)$.

**16)** מצאו את $\int_e^4 f(x)dx$, אם נתון כי $\int_2^x \frac{t^3-t+2}{t^2-t}dt=\int_2^x f(t)dt+2\int_2^x \frac{1}{t-1}dt$.

**17)** מצאו את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $F(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$ בנקודה $x_0=2\pi$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** שאלת הוכחה.

**2)** שאלת הוכחה.

**3)** $I'(x)=e^{-x^2}$

**4)** $I'(x)=\frac{\ln(x)^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2$

**5)** $I'(x)=(x^3+x)(3x^2+1)\ln(x^3+x)$

**6)** $I'(x)=\frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}-\frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}}$

**7)** $\frac{1}{2}$

**8)** $\frac{2}{3}$

**9)** $4e^{16}$

**10)** $0$

**11)** תחום הגדרה: כל $x$.
נקודות קיצון: אין קיצון, עולה לכל $x$.
נקודות פיתול: $x=-1,1,-\frac{3}{7}$.
תחומי קמירות: $x>1$ , $-1<x<-\frac{3}{7}$.
תחומי קעירות: $-\frac{3}{7}<x<1$ , $x<-1$.

**12)** $40$

**13)** שאלת הוכחה.

**14)** שאלת הוכחה.

**15)** שאלת הוכחה.

**16)** $14-2\ln 4-\frac{1}{2}e^2-e$

**17)** $y=x-2\pi$


כתב ופתר – גיא סלומון ©