

שיטות מתמטיות בכלכלה

פרק 4 - המרחב R^n

תוכן העניינים

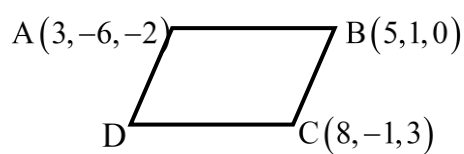
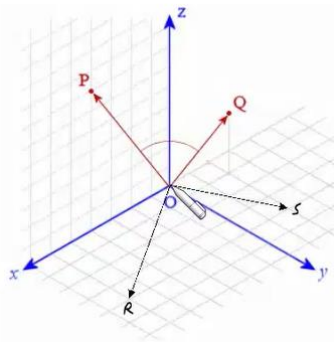
1. וקטורים 1
2. מרחב וקטורי 6
3. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית 7
4. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה 9
5. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים 12
6. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס 14

וקטורים

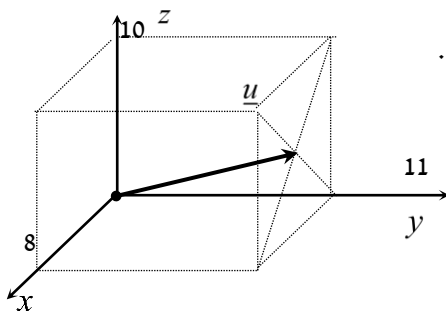
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך: $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

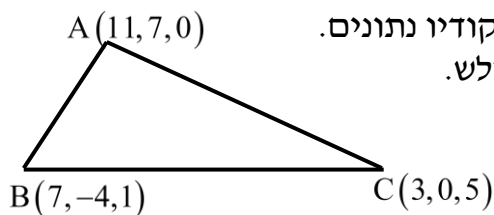
- (1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \vec{S}$ שבאיור. הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



- (2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית, ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים. מצאו את שיעורי הקדקוד D. רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



- (3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



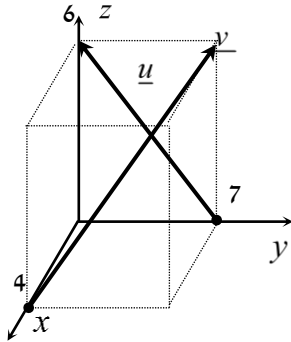
- (4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים. מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

(5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N , אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$

והווקטור $\overrightarrow{MN} = (-1, -1, 9)$.



(6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.

מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.

(7) מצאו את x , y ו- z , אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$, כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$,

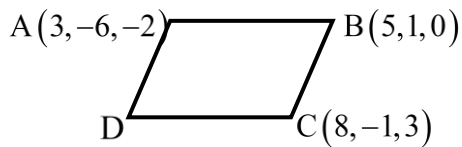
$\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1, 0, 2)$, $B(3, 7, -4)$, $C(6, 9, 0)$, $D(7, 4, 10)$, $E(9, 11, 4)$

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$? נמקו.



(9) בשרטוט נתונה מקבילית,

ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.

מצאו את שיעורי הקדקוד D .

* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.

בשאלות 10-16 נתונים הווקטורים $\underline{w} = (2, 6, -5)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{u} = (-3, 1, 4)$.
 * בשאלות 13, 14, 16 הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$

(11) חשבו:

א. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

(12) $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$

(13) $\underline{u} / |\underline{u}|$

(14) $d(\underline{u}, \underline{v})$

(15) $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$

(16) $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

בשאלות 17-19 נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$,
 ויש למצוא את הווקטורים:

(17) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

(18) $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

(19) $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
 $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$, $C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$.
 הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

(21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :

$$A(1, 2, 0), B(-2, 5, 3), C(-1, 8, 4), D(4, 3, -1)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

(22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר :

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5), \underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1), \underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3), \underline{v} = (4, -2, -6)$

תשובות סופיות

$$\vec{P} = (4, 0, 7), \quad \vec{Q} = (-2, 1, 3), \quad \vec{R} = (6, 4, 0), \quad \vec{S} = (-2, 4, 0) \quad (1)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (2)$$

$$\underline{u} = (4, 11, 5) \quad (3)$$

$$M = (7, 1, 2) \quad (4)$$

$$N = (-1, -5, 10) \quad \text{ב.} \quad \overrightarrow{EF} = (5, -1, 0) \quad \text{א.} \quad (5)$$

$$\underline{u} = (0, -7, 6), \quad \underline{v} = (-4, 7, 6) \quad (6)$$

$$z = 6, \quad y = -2, \quad x = 5 \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. לא.} \quad (8)$$

$$D = (6, -8, 1) \quad (9)$$

$$(-17, 7, 24) \quad \text{ג.} \quad (-2, 1, 3) \quad \text{ב.} \quad (-6, 2, 8) \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$(9.5, 9.5, -18) \quad \text{ב.} \quad (2.5, -1, -3.5) \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$(19, 19, -36) \quad (12)$$

$$\left(\frac{-3}{\sqrt{20}}, \frac{1}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}} \right) \quad (13)$$

$$\sqrt{158} \quad (14)$$

$$14 \quad (15)$$

$$\underline{u}^* \quad (16)$$

$$(5, 7, 1) \quad (17)$$

$$(-8, -16, 8) \quad (18)$$

$$(8, 12, 0) \quad (19)$$

$$\text{שאלת הוכחה.} \quad (20)$$

$$\text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב. כן.} \quad (21)$$

$$\alpha = 97.277^\circ \quad \text{א.} \quad \alpha = 90^\circ \quad \text{ב.} \quad \alpha = 180^\circ \quad \text{ג.} \quad (22)$$

מרחב וקטורי

שאלות

בשאלות 1-7 בדקו האם W תת-מרחב של R^3 :

$$W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\} \quad (1)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c\} \quad (2)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\} \quad (3)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\} \quad (4)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\} \quad (5)$$

$$W = \{(a, b, c) \mid c - b = b - a\} \quad (6)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

$$W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\} \quad (7)$$

כלומר, a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

תשובות סופיות

(1) כן

(2) כן

(3) כן

(4) לא

(5) לא

(6) כן

(7) לא

צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

בשאלות 1-7 נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), \quad u_2 = (0, 11, -5, 3), \quad u_3 = (2, -5, 3, 1), \quad u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

- 1) א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?
 ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלויה ליניארית?
- 2) א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 3) א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלויה ליניארית?
 במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.
- 4) נתון $v = (4, 12, k, -2k)$.
 א. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה צריך להיות ערכו של k , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?
- 5) נתון $v = (a, b, c, d)$.
 א. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?
 ב. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהווקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?
 ג. מה התנאים על a, b, c, d , על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

- (6) הביעו את הווקטור $(10, 8, 0, 14)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2 ו- u_3 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (7) הביעו את הווקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 .
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?
- (8) עבור איזה ערכים של a, b, c , הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
 $\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 2u_3 + u_2, u_2 = u_1 - 2u_3$.
- (3) א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1 = 4u_4 - u_2, u_2 = 4u_4 - u_1$.
- (4) א-ג. $k = -4$.
- (5) $a = 5t + 3s, b = 4t - 13s, c = 7s, d = 7t$.
- (6) אינסוף.
- (7) אינסוף.
- (8) לכל ערך של a, b, c .

בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

שאלות

- (1) בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :
- א. $\{(1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$
- ב. $\{(1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1)\}$
- ג. $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9)\}$
- (2) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$
- א. האם T בסיס ל- R^3 ?
- ב. מצאו קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב- T .
- ג. השלימו את T' לבסיס של R^3 .

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגניות

- (3) להלן שלוש מערכות של משוואות הומוגניות :
1. $\begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$
- נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.
- נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.
- נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.
- מצאו בסיס וממד ל- U , W ו- V .

- (4) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$
- מצאו בסיס וממד ל- U .

- (5) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$
- מצאו בסיס וממד ל- U .

- (6) נתון $U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$
- מצאו בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת-מרחב

בשאלות 7 ו-8 נתונים שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

(7) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

(8) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

בשאלות 9 ו-10 מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

$$(9) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

תשובות סופיות

- (1) א. לא. ב. לא. ג. לא.
- (2) א. לא. ב. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$ ג. $T' = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (0, 0, 1)\}$
- (3) W - בסיס: $\{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\}$ ממד: 2.
- U - בסיס: $\{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\}$ ממד: 2.
- V - בסיס: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ ממד: 3.
- (4) בסיס: $\{(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}$ ממד: 2.
- (5) בסיס: $\{(-1, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 0)\}$ ממד: 2.
- (6) בסיס: $\{(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$ ממד: 3.
- (7) בסיס: $\{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2)\}$ ממד: 2.
- (8) בסיס: $\{(1, -1, 1, 1), (0, -1, 1, -2), (0, 0, -2, 5)\}$ ממד: 3.
- (9) מרחב שורה: בסיס: $\{(4, 1, 1, 5), (0, 11, -5, 3)\}$ ממד: 2.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 2, דרגה: 2.
- (10) מרחב שורה: בסיס: $\{(1, 2, 1, 3, 5), (0, 11, -5, -4), (0, 0, 0, 1, 1)\}$ ממד: 3.
- מרחב עמודה: בסיס: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -16 \\ 37 \end{pmatrix} \right\}$ ממד: 3, דרגה: 3.

חיתוך, סכום וסכום ישיר של תת-מרחבים

שאלות

1) להלן שלוש מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות :

$$1) \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

נסמן ב- V, U, W את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 1, 2 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- U, W ו- V .

ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.

ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

בשאלות 2-7 נתונים שני תת-מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{sp}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{sp}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

2) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

3) מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

4) מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.

5) מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$ (פתור בשתי דרכים שונות).

6) האם $U+V = R^4$?

7) האם $U \oplus V = R^4$?

תשובות סופיות

$$B_W = \{(-1.5, 2.5, 1, 0), (-1.5, -0.5, 0, 1)\} \quad , \quad \dim W = 2 \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$B_U = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2$$

$$B_V = \{(-1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad , \quad \dim V = 3$$

$$B_{U+V} = \{(0, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\} \quad \dim(U+V) = 3 \quad \text{ב.}$$

$$B_{U \cap V} = \{(-2, -1, 1, 0), (1, 2, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 2 \quad \text{ג.}$$

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = 0 \\ -3x - y + 2t = 0 \end{cases} \quad , \quad B_U = \{(1, 1, -1, 2), (0, 2, -5, 1)\} \quad , \quad \dim U = 2 \quad (2)$$

$$-8x - y + 5z + 2t = 0 \quad , \quad B_V = \{(1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, -2), (0, 0, 2, -5)\} \quad , \quad \dim V = 3 \quad (3)$$

$$B_{U+V} = \{(1, 1, -1, 2), (0, -4, 10, -2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \quad , \quad \dim(U+V) = 4 \quad (4)$$

$$B_{U \cap V} = \{(5, 1, 5, 8)\} \quad , \quad \dim(U \cap V) = 1 \quad (5)$$

$$\text{כ.} \quad (6)$$

$$\text{לא.} \quad (7)$$

וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

שאלות

בשאלות 1-5 נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

(1) מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

(2) מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

(3) מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

(4) מצאו מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

(5) אשרו את הטענות הבאות :

$$1. [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$$

$$2. [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$$

$$3. [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$$

תשובות סופיות

$$(1) (x, y - x - z, z)$$

$$(2) (x, y, z - x - y)$$

$$(3) [M]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) [M]_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) שאלת הוכחה.