# שיטות כמותיות 66231

## פרק 1 - המרחב R^n

### תוכן העניינים

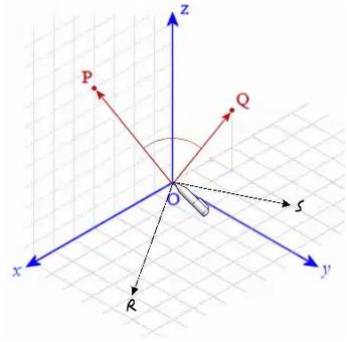

1. וקטורים ..... 1
2. מרחב וקטורי ..... 6
3. צירופים ליניאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית ..... 7
4. בסיס ומימד, דרגה של מטריצה ..... 9
5. חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים ..... 12
6. וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס ..... 14

# וקטורים

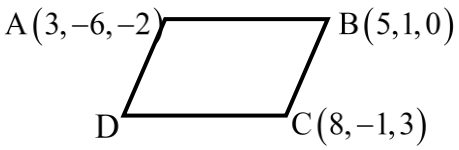
**הערת סימון:** אנו נסמן את הווקטור $u$ כך: $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}, \vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

## שאלות

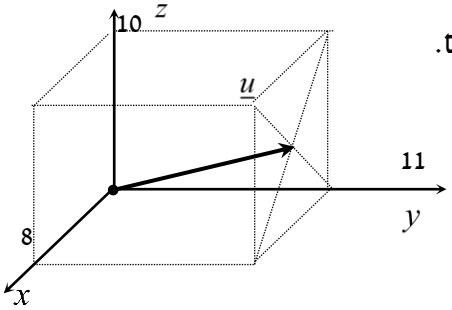
**1)** רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



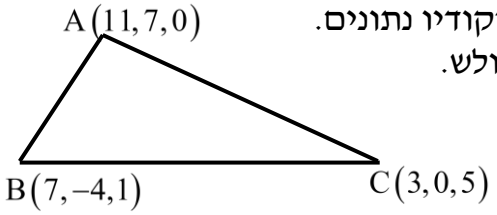

**2)** בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.




**3)** נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.




**4)** בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.





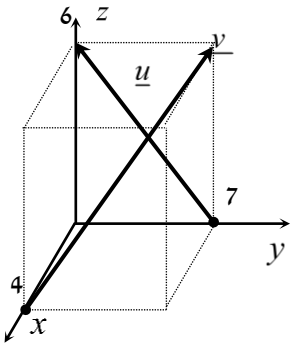
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו-$F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה $N$, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

**6)** נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



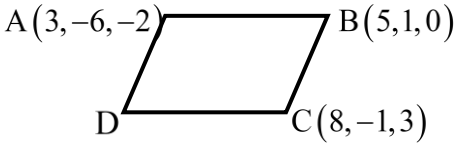

**7)** מצאו את $x$, $y$ ו-$z$, אם נתון ש-$\underline{u}=\underline{v}$, כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

**8)** נתונות הנקודות הבאות:
$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמקו.

**9)** בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.





לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$ , $\underline{w}=(2,6,-5)$ .

* בשאלות **13**, **14**, **16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

**10)** חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

**11)** חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

**12)** $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

**13)** $\underline{u}/|\underline{u}|$

**14)** $\mathrm{d}(\underline{u},\underline{v})$

**15)** $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

**16)** $\mathrm{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$ , $B(4,2,-1)$ , $C(3,-1,2)$ ,
ויש למצוא את הווקטורים:

**17)** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

**18)** $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

**19)** $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

**20)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$\mathrm{A}(-4,2,1)$ , $\mathrm{B}(0,2,-1)$ , $\mathrm{C}(-3,-5,0)$ , $\mathrm{D}(-7,-5,2)$ .
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**21)** נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:

$A(1,2,0)$ , $B(-2,5,3)$ , $C(-1,8,4)$ , $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

**22)** חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$, כאשר:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$ , $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$ , $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$ , $\underline{v}=(4,-2,-6)$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

**2)** $D=(6,-8,1)$

**3)** $\underline{u}=(4,11,5)$

**4)** $M=(7,1,2)$

**5)** א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

**6)** $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

**7)** א. $x=5\quad y=-2,\quad z=6,$

**8)** א. שאלת הוכחה. ב. לא.

**9)** $D=(6,-8,1)$

**10)** א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

**11)** א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

**12)** $(19,19,-36)$

**13)** $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

**14)** $\sqrt{158}$

**15)** 14

**16)** $\underline{u}^*$

**17)** $(5,7,1)$

**18)** $(-8,-16,8)$

**19)** $(8,12,0)$

**20)** שאלת הוכחה.

**21)** א. שאלת הוכחה. ב. כן.

**22)** א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# מרחב וקטורי

## שאלות

בשאלות **1-7** בדקו האם $W$ תת-מרחב של $R^3$ :

**1)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$

**2)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$

**3)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$

**4)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$

**5)** $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$

**6)** $W=\{(a,b,c)\,|\,c-b=b-a\}$

כלומר, $a$ , $b$ ו- $c$ מהווים סדרה חשבונית.

**7)** $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$

כלומר, $a$ , $b$ ו- $c$ מהווים סדרה הנדסית.

## תשובות סופיות

**1)** כן
**2)** כן
**3)** כן
**4)** לא
**5)** לא
**6)** כן
**7)** לא


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# צירופים לינאריים, פרישה ליניארית ותלות ליניארית

בשאלות **1-7** נתונים הווקטורים הבאים:

$$u_1=(4,1,1,5),\quad u_2=(0,11,-5,3),\quad u_3=(2,-5,3,1),\quad u_4=(1,3,-1,2)$$

**1)** א. האם $u_1$ הוא צירוף לינארי של $u_4$?

ב. האם $u_1$ שייך ל-$Sp\{u_4\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלויה ליניארית?

**2)** א. האם $u_3$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_3$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**3)** א. האם $u_4$ הוא צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. האם $u_4$ שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלויה ליניארית?

במידה וכן, רשמו כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הווקטורים האחרים.

**4)** נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

א. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה צריך להיות ערכו של $k$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?

**5)** נתון $v=(a,b,c,d)$.

א. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה צירוף לינארי של $u_1$ ו-$u_2$?

ב. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהווקטור $v$ יהיה שייך ל-$Sp\{u_1,u_2\}$?

ג. מה התנאים על $a,b,c,d$, על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהיה תלויה ליניארית?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**6)** הביעו את הווקטור $(10,8,0,14)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$ ו-$u_3$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**7)** הביעו את הווקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של $u_1$, $u_2$, $u_3$ ו-$u_4$.
בכמה אופנים ניתן לעשות זאת?

**8)** עבור איזה ערכים של $a,b,c$, הווקטורים הבאים תלויים ליניארית:
$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}$

## תשובות סופיות

**1)** א. לא. ב. לא. ג. לא.

**2)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=2u_3+u_2,\ u_2=u_1-2u_3$.

**3)** א. כן. ב. כן. ג. כן, $u_1=4u_4-u_2,\ u_2=4u_4-u_1$.

**4)** א-ג. $k=-4$

**5)** $a=5t+3s,\ b=4t-13s,\ c=7s,\ d=7t$

**6)** אינסוף.

**7)** אינסוף.

**8)** לכל ערך של $a,\ b,\ c$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# בסיס ומימד, דרגה של מטריצה

## שאלות

**1)** בדקו אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל-$R^3$:

א. $\{(1,0,1),\ (0,0,1)\}$

ב. $\{(1,1,2),\ (1,2,3),\ (3,3,4),\ (2,2,1)\}$

ג. $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$

**2)** נתונה קבוצת וקטורים ב-$R^3$ $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9),(2,3,4)\}$.

א. האם $T$ בסיס ל-$R^3$?

ב. מצאו קבוצה $T'$, שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים, בלתי תלויה ליניארית ב-$T$.

ג. השלימו את $T'$ לבסיס של $R^3$.

### מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

**3)** להלן שלוש מערכות של משוואות הומוגניות:

1. $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב-$W$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1.

נסמן ב-$U$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2.

נסמן ב-$V$ את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3.

מצאו בסיס וממד ל-$W$, $U$ ו-$V$.

**4)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$.

מצאו בסיס וממד ל-$U$.

**5)** נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$.

מצאו בסיס וממד ל-$U$.

**6)** נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$.

מצאו בסיס וממד ל-$U$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**מציאת בסיס וממד לתת-מרחב**

בשאלות **7** ו-**8** נתונים שני תתי מרחבים של המרחב $R^4$ :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

**7)** מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$.

**8)** מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$.

**מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה**

בשאלות **9** ו-**10** מצאו בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצה, וציינו את דרגת המטריצה (rank) :

**9)**
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

**10)**
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. לא. ב. לא. ג. לא.

**2)** א. לא. ב. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ ג. $T'=\{(1,2,3),(4,5,6),(0,0,1)\}$

**3)** $W$ - בסיס: $\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$, ממד: 2.

$U$ - בסיס: $\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$, ממד: 2.

$V$ - בסיס: $\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

**4)** בסיס: $\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\}$, ממד: 2.

**5)** בסיס: $\{(-1,1,0,1),(2,-1,1,0)\}$, ממד: 2.

**6)** בסיס: $\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$, ממד: 3.

**7)** בסיס: $\{(1,1,-1,2),(0,-4,10,-2)\}$, ממד: 2.

**8)** בסיס: $\{(1,-1,1,1),(0,-1,1,-2),(0,0,-2,5)\}$, ממד: 3.

**9)** מרחב שורה: בסיס: $\{(4,1,1,5),(0,11,-5,3)\}$, ממד: 2.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}4\\0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 2, דרגה: 2.

**10)** מרחב שורה: בסיס: $\{(1,2,1,3,5),(0,11,-5,-4),(0,0,0,1,1)\}$, ממד: 3.

מרחב עמודה: בסיס: $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-3\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-16\\37\end{pmatrix}\right\}$, ממד: 3, דרגה: 3.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# חיתוך, סכום וסכום ישר של תת-מרחבים

## שאלות

**1)** להלן שלוש מערכות של משוואות לינאריות הומוגניות:

$$1)\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$$

נסמן ב- $V, U, W$ את המרחבים הנפרשים ע"י פתרון המערכות 2,1 ו-3 בהתאמה.

א. מצאו בסיס וממד ל- $U$, $W$ ו- $V$.
ב. מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.
ג. מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$.

בשאלות **2-7** נתונים שני תת-מרחבים של המרחב $R^4$:

$$U = sp\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$
$$V = sp\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

**2)** מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $U$.

**3)** מצאו בסיס, ממד ומשוואות ל- $V$.

**4)** מצאו בסיס וממד ל- $U+V$.

**5)** מצאו בסיס וממד ל- $U \cap V$ (פתור בשתי דרכים שונות).

**6)** האם $U+V=R^4$?

**7)** האם $U \oplus V = R^4$?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** א. $B_W=\{(-1.5,2.5,1,0),(-1.5,-0.5,0,1)\}$ , $\dim W=2$

$B_U=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$ , $\dim U=2$

$B_V=\{(-1,0,0,1),(-1,0,1,0),(1,1,0,0)\}$ , $\dim V=3$

ב. $B_{U+V}=\{(0,0,-1,1),(0,1,1,0),(1,1,0,0)\}$ $\dim(U+V)=3$

ג. $B_{U\cap V}=\{(-2,-1,1,0),(1,2,0,1)\}$ , $\dim(U\cap V)=2$

**2)** $\begin{cases}-3x+5y+2z=0\\-3x-y+2t=0\end{cases}$ , $B_U=\{(1,1,-1,2),\ (0,2,-5,1)\}$ , $\dim U=2$

**3)** $-8x-y+5z+2t=0$ , $B_V=\{(1,-1,1,1),\ (0,1,1,-2),\ (0,0,2,-5)\}$ , $\dim V=3$

**4)** $B_{U+V}=\{(1,1,-1,2),\ (0,-4,10,-2),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)\}$ , $\dim(U+V)=4$

**5)** $B_{U\cap V}=\{(5,1,5,8)\}$ , $\dim(U\cap V)=1$

**6)** כן.

**7)** לא.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# וקטור קואורדינטות ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס

## שאלות

בשאלות **1-5** נתונים שני בסיסים של $R^3$ :

$B_1=\{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ , $B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$

**1)** מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_1$ . סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

**2)** מצאו את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס $B_2$ . סמנו וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

**3)** מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2$ . סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

**4)** מצאו מטריצת מעבר מהבסיס $B_2$ לבסיס $B_1$ . סמנו מטריצה זו ב- $[M]_{B_2}^{B_1}$.

**5)** אשרו את הטענות הבאות:

1. $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$
2. $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$
3. $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

## תשובות סופיות

**1)** $(x,y-x-z,z)$

**2)** $(x,y,z-x-y)$

**3)** $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$

**4)** $[M]_{B_2}^{B_1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\-2&-1&0\end{pmatrix}$

**5)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©