מבוא לאקונומטריקה א

פרק 8 - המודל הריבועי

תוכן העניינים

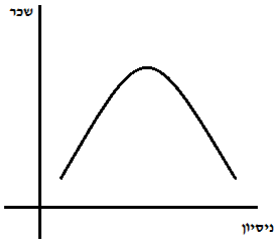
1. רשימת סרטונים 1

המודל הריבועי:

רקע:

משמש עבור משתנים שתרומתם לניבוי המשתנה התלוי איננה ליניארית אלא פרבולית עם נקודת מינימום או מקסימום.

למשל:



מודל הרגרסיה הריבועית מניח כי בשלב מסוים התרומה השולית משנה את סימנה (מחיובי לשלילי או משלילי לחיובי).

המודל הריבועי: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$.

התרומה השולית של X בניבוי Y: $\frac{dy}{dx} = \beta_1 + 2\beta_2 X_i$.

התרומה השולית במקרה זה <u>איננה קבועה אלא תלויה ב-X</u>.

הנגזרת מתאפסת בנקודה: $X^* = -\frac{\beta_1}{2\beta_2}$.

אם β_2, המקדם של X^2, הוא <u>חיובי</u>: מדובר <u>בנקודת מינימום</u> שעד אליה התרומה השולית שלילית וממנה ואילך חיובית.

אם β_2, המקדם של X^2, הוא <u>שלילי</u>: מדובר <u>בנקודת מקסימום</u> שעד אליה התרומה השולית חיובית וממנה ואילך שלילית.

שאלות:

1) במחקר על השפעת הגיל על מספר הדקות שפרט משוחח בטלפון הנייד נאמד המודל הבא: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 A_i + \beta_2 A_i^2 + u_i$.
מה צריכים להיות סימני המקדמים שייתנו את התוצאה הבאה:
בגילאים מבוגרים ובגילאים צעירים מדברים יותר מאשר בגילאי הביניים?

2) חוקר החליט להשוות בין שני מודלים:
מודל רגרסיה פשוטה של X = הוצאות פרסום (באלפי שקלים לשנה)
על Y = ציון לחוזק המותג (בציון 10-0).
מודל רגרסיה מרובה הכולל בנוסף את המשתנה X^2 = הוצאה עבור פרסום בריבוע.

א. תארו את המודל באופן אלגברי.
להלן תוצאות האמידה של המודלים על סמך מדגם של 33 חברות:

1. $\hat{Y}_i = 22.163 + 0.363 X_i$, $S_{\hat{\beta}} = 0.097$ $R^2 = 0.4676$.

2. $\hat{Y}_i = 7.059 + 1.085 X_i - 0.004 X_i^2$, $S_{\hat{\beta}_1} = 0.37$, $S_{\hat{\beta}_2} = 0.002$ $R^2 = 0.53$.

ב. מהו גודל השינוי השולי בכל אחד מהמודלים?
אמדו את גודלו והסבירו את משמעותו.

ג. איזה מודל עדיף? מהם המבחנים הסטטיסטיים המתאימים? בצעו אותם.

ד. בדקו האם לאחר רמת הוצאה מסוימת כבר לא משתלם לפרסם.

3) בכדי לאמוד את הקשר בין הישגיהם של תלמידים שסיימו את בית הספר התיכון באמצעות ציון של מבחן כניסה לאוניברסיטה (G שנמדד בנקודות) לגודל בית הספר (HS שנמדד במאות תלמידים) נאמד מודל ריבועי על בסיס מדגם של 400 תלמידים מתוך כלל התלמידים שניגשו לבחינת הכניסה.
להלן המשוואה הנאמדת (סטיות התקן נתונות בסוגריים):

$\hat{G} = 997.8 + 19.81 HS - 2.13 HS^2$, $R^2 = 0.076$.
(0.55) (3.99) (6.20)

א. הסבירו את המשמעות של המודל הריבועי (לווה את תשובתך בחישוב של הגודל האופטימאלי של בית הספר ובתיאור גרפי של המודל).

ב. מה יהיה השינוי במבחן בין תלמיד שלמד בבית ספר עם 300 תלמידים לבין תלמיד שלמד בבית ספר עם 330 תלמידים?

ג. מה יהיה הגודל האופטימאלי של בית הספר בהנחה שהמשתנה HS נמדד בעשרות תלמידים ולא במאות תלמידים?

ד. האם מספר התלמידים בריבוע תורם להסבר של המודל? נסח את ההשערה ובדוק אותה.

ה. הועלתה הטענה כי המודל איננו מצליח כלל להסביר את התנהגות הציונים במבחן. נסח את ההשערה המתאימה ובדוק אותה.

תשובות סופיות:

1) $\beta_2 > 0$; $\beta_1 < 0$.

2) א. המודל הליניארי הפשוט: $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$.

המודל הריבועי: $Y_i + \alpha + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$.

ב.1. גודל השינוי הוא β , האומד הינו: $b = 0.363$.

2. גודל השינוי הוא: $\beta_1 + 2\beta_2 X_i$, האומד הינו: $1.085 - 0.008 \cdot X_i$.

ג. המודל הריבועי עדיף עפ"י מבחנים t ו-WALD.

ד. בשלב מסוים השינוי השולי הופך מחיובי לשלילי.

3) א. ראה סרטון.

ב. השינוי יהיה: 1.278 נקודות.

ג. $X^{*\prime} = 46.5$.

ד. כן.

ה. יש עדות לכך.