מבוא לסטטיסטיקה

פרק 21 - הלמה של ניימן פירסון

תוכן העניינים

הלמה של ניימן פירסון:

רקע:

שיטה זו עוזרת לנו לבנות מבחנים בעלי עוצמה מקסימאלית עבור α נתונה.
הלמה של ניימן פירסון אומרת שמבחן בעל עוצמה מקסימלית מתקבל כאשר אזור הדחיה שלו כולל את התוצאות שעבורן יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

נגדיר את יחס הנראות: $x_1, x_2, ..., x_n$ - תוצאות הניסוי.

ההשערות: $H_0 : x_i \sim p_0 \quad , H_1 : x_i \sim p_1$.

$$\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{p_{H1}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{p_{H0}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}$$

המשמעות של יחס הנראות היא פי כמה H_1 יותר סבירה מ- H_0.

עבור משתנים שמתפלגים בדיד:

שלב א: עבור כל תוצאות המדגם האפשריים מחשבים את הסיכויים בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

שלב ב: מחלקים את הסיכויים באופן הבא: $\lambda\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \frac{p_{H1}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}{p_{H0}\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)}$.

ומקבלים את יחס הנראות.

שלב ג: מסדרים את תוצאות הניסוי על פי סדר יורד מהתוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הגבוה ביותר עד התוצאה שמניבה את ערך יחס הנראות הנמוך ביותר.

שלב ד: מכניסים את התוצאה שמניבה את יחס הנראות הגבוה ביותר לאזור הדחיה ובודקים תחת השערת האפס מהי רמת המובהקות המתקבלת. צוברים את התוצאות לפי העיקרון שהוצג עד שרמת המובהקות לא תעלה על ה- α הרצויה.

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

איכות של מוצר מסווגת ל-4 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני וירוד.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד
"היוצר"	0.6	0.15	0.25	0
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4

בוחרים ממשלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע. על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית). צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 20%.

עבור משתנים שמתפלגים רציף:

שלב א: בונים את פונקציית הצפיפות המשותפת בהנחת השערת האפס ובהנחת ההשערה האלטרנטיבית.

שלב ב: מחלקים את שלב א באופן הבא: $\lambda\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\dfrac{f_{H1}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)}{f_{H0}\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)}$.

ומקבלים את פונקציית יחס הנראות.

שלב ג: מזהים את האזור עבורו יחס הנראות הוא הגבוה ביותר.

שלב ד: לפי ההתפלגות של השערת האפס מוצאים את הערכים הקריטיים באזור שנקבע בסעיף הקודם כך שרמת המובהקות תהיה ה- α שנקבעה מראש.

דוגמה (פתרון בהקלטה):

נתון: $X\sim\exp\left(\lambda\right)$.

ההשערות הן: $H_1:\lambda=2\ ,\ H_0:\lambda=1$.

מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 5% על סמך תצפית בודדת.

שאלות:

1) איכות של מוצר מסווגת ל-5 רמות איכות: מצוין, טוב, בינוני, ירוד ופסול.
להלן התפלגות טיב המוצר בשני מפעלים:

מפעל / איכות	מצוין	טוב	בינוני	ירוד	פסול
"היוצר"	0.4	0.2	0.1	0.1	0.2
"שמשון"	0.1	0.2	0.3	0.4	0

בוחרים משלוח מוצר באקראי, אך לא יודעים מאיזה מפעל המשלוח הגיע.
על סמך בדיקת האיכות מנסים להכריע האם מדובר במפעל "היוצר" (השערת האפס) או במפעל "שמשון" (השערה אלטרנטיבית).

א. חשבו את יחס הנראות עבור כל תוצאות המדגם האפשריים.

ב. צרו כלל הכרעה לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא תעלה על 25%.

ג. מהי עוצמת המבחן שיצרת בסעיף הקודם?

2) מטבע הוטל 3 פעמים ומתבוננים במספר הפעמים שהתקבלה התוצאה ראש.
נסמן ב- p את הסיכוי בהטלה בודדת לקבל את התוצאה ראש.
ההשערות הן: $H_0: p=0.5$, $H_1: p=0.25$.
מצאו מבחן ברמת מובהקות שלא תעלה על 30% עם עוצמה מקסימלית.
מהי העוצמה?

3) בכד א' 7 כדורים לבנים ו-8 שחורים. בכד ב' 8 כדורים לבנים ו-7 שחורים.
אדם בוחר כד וממנו מוציא באקראי 4 כדורים ללא החזרה. הוא מתבוננן במספר הכדורים הלבנים שהוצאו ומודיע לך את המספר המתקבל.
יש לבנות כלל הכרעה על סמך המספר המתקבל שיכריע האם מדובר בהוצאה מכד א' (השערת האפס) או מכד ב' (השערה אלטרנטיבית).

א. בנו כלל הכרעה בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות שלא תעלה על 10%.

ב. מהי רמת המובהקות של כלל ההכרעה שבנית בסעיף הקודם?

ג. מה הסיכוי לטעות מסוג שני של כלל ההכרעה שבנית?

4) בצרור מפתחות 5 מפתחות שרק אחד פותח את הדלת. על סמך מספר הניסיונות לפתיחת הדלת יש להחליט האם הניסיונות נעשו ללא החזרה (השערת האפס) או עם החזרה (השערה אלטרנטיבית) של המפתחות לצרור.
מצאו מבחן לפי הלמה של ניימן פירסון ברמת מובהקות שלא עולה על 0.25.

5) מספר תאונות הדרכים בכביש 4 מתפלג פואסונית עם קצב של תאונה ביממה.
לאחרונה התעורר החשד שתוחלת מספר התאונות בכביש עלתה לקצב של שתי תאונות ביממה. דגמו 4 ימים אקראיים וקיבלו את מספר התאונות הבאות לימים: 1, 0, 3, 3.

א. נסחו את הבעיה ובנו מבחן MP עם: $\alpha \le 0.1$.

ב. מהי מסקנתך ומהי הטעות האפשרית במסקנה?

ג. מה הסיכוי להכריע שכיום קצב תאונות הדרכים בכביש מספר 4 עלה לשתי תאונות ביממה שאכן כך הדבר באמת?
פתרו על סמך המבחן של סעיף א'.

6) התפלגות זמן ההמתנה לקופה בסופרמרקט מתפלג מעריכית.
בעל הסופרמרקט טוען שתוחלת זמן ההמתנה היא 5 דקות אך הלקוחות חושדים שהתוחלת גבוהה יותר ושווה ל-10 דקות.

א. רשמו את השערות המחקר וחשבו את פונקציית יחס הנראות על סמך זמן המתנה של לקוח אקראי לקופה.

ב. מה כיוון אזור הדחייה של השערת האפס?

ג. מצאו את אזור הדחייה עבור רמת מובהקות של 5%.

ד. בהמשך לסעיף הקודם, מה הסיכוי להכריע לטובת בעל הסופרמרקט בטעות?

7) יהי X תצפית בודדת מפונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ פרמטר חיובי:

$$f_\theta(x)=\begin{cases}2\theta X+1-\theta & 0\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ההשערות הן: $H_1:\theta=1$, $H_0:\theta=0$.

א. הוכיחו שמבחן MP (עוצמה מקסימלית) עם רמת מובהקות α יהיה: $C=\{X>1-\alpha\}$.

ב. הוכיחו שהעוצמה של המבחן שנמצאה היא: $2\alpha-\alpha^2$.

ג. מצאו את כלל ההכרעה והעוצמה עבור: $\alpha=0.05$.

8) מחשב חניון "אתרים" רושם את זמן כניסת כל מכונית לחניון. ישנו חשד שעקב תקלה המחשב מבצע את הרישום לכל מכונית שניה. נסמן ב- X את הזמן בדקות בין רישום לרישום.

אם הרישום הוא תקין, ההתפלגות היא מעריכית: $f_0\left(x\right)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$.

אם הרישום הוא לפי החשד, פונקציית הצפיפות היא: $f_1\left(x\right)=\lambda^2\cdot x\cdot e^{-\lambda x}$.

כאשר מדובר באותו פרמטר λ .

א. רשמו את ההשערות.

ב. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימלית כדי לבדוק את ההשערות.

ג. פתרו עבור רמת מובהקות של 5% ו- $\lambda=1$.

ד. רשמו את איזו הדחייה עבור שתי תצפיות אקראיות של X .

9) יהי $X_1,\ldots,X_n$ מדגם מקרי מהתפלגות בעלת פונקציית הצפיפות הבאה, כאשר θ פרמטר חיובי: $f_\theta\left(x\right)=\begin{cases}\theta e^{1-\theta x} & x\geq\dfrac{1}{\theta}\\ 0 & otherwise\end{cases}$.

א. מצאו מבחן בעל עוצמה מקסימאלית לבדיקת ההשערות: $H_0:\theta=1$
כנגד: $H_1:\theta=2$, על סמך תצפית בודדת (ברמת מובהקות 5%).

ב. מהי עוצמת המבחן שמצאת?

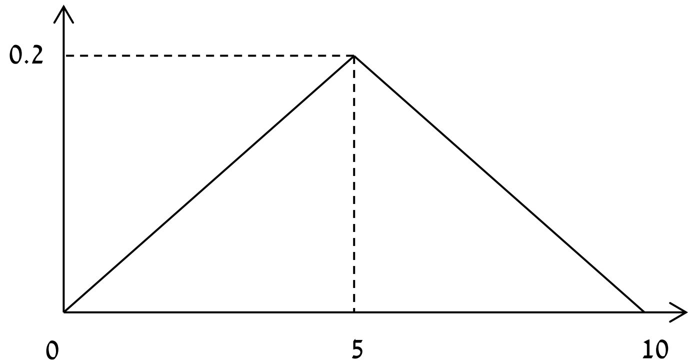
ג. כעת נשנה את הערך תחת האלטרנטיבה ל-3 במקום 2.
בחרו בתשובה הנכונה ונמקו:

i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

ii. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תקטן.

iii. יש לחשב כדי להחליט.

10) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה שנסמנה ב- $f_1\left(x\right)$:



כמו כן נתון ש : $f_0(x)=\begin{cases}0.1 & 0\le x\le 10\\ 0 & else\end{cases}$.

א. עבור השערות : $H_0: f=f_0$ כנגד : $H_1: f=f_1$, מצאו את צורת אזור הדחיה של מבחן בעל עצמה מקסימלית, על סמך תצפית בודדת.

ב. בהינתן : $\alpha=0.05$, מצאו את כלל הכרעה מתאים בעל עוצמה מקסימלית.

11) X הוא משתנה רציף המוגדר בין 0 ל-20.

להלן השערות מחקר : $H_0: X\sim U(0,20)$, $H_1: f(X)=\dfrac{e^{-\frac{X}{4}}}{4\left(1-e^{-5}\right)}$.

יש לבנות מבחן בעל עוצמה מקסימלית ברמת מובהקות של 10% על סמך הממוצע 100 תצפיות אקראיות.

תשובות סופיות:

1) א. להלן טבלה: ב. ראה סרטון. ג. 0.7.

המפעל	ירוד	בינוני	טוב	מצוין	פסול
H_0	0.1	0.1	0.2	0.4	0.2
H_1	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\gamma(x)$	4	3	1	0.25	0

2) $C=\{X=0\}$, עוצמה $\frac{27}{64}$.

3) א. $C=\{X=4\}$. ב. 0.0256. ג. 0.9487.

4) $C=\{X=1 \ or \ \ X\geq 6\}$.

5) א. נדחה את השערת האפס אם מספר התאונות הכולל ב-4 הימים יהיה לפחות 8 תאונות. ב. נקבל את השערת האפס (טעות מסוג שני). ג. 0.5471.

6) א. H_0: התוחלת של זמן ההמתנה 5 דקות.
H_1: התוחלת של זמן המתנה 10 דקות.
פונקציית יחס הנראות: $0.5e^{0.1x}$.
ב. $c=\{x\geq k\}$. ג. $c=\{x\geq 14.98\}$. ד. 0.776.

7) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $c=\{x>0.95\}$, 0.0975.

8) א. השערת האפס: שומר הלילה רושם כל מבקר אשר ניכנס לבניין.
ההשערה האלטרנטיבית: שומר הלילה מדלג ברישום על מבקר, רושם אחד כן ואחד לא.
ב. אזור הדחייה יהיה היכן שיחס הנראות הינו גבוה לכן הוא יהיה מאינסוף ועד ערך k מסוים.
ג. נדחה את השערת האפס אם: $x>2.996$. ד. $x_1\cdot x_2>k$.

9) א. נדחה את H_0 עבור: $\frac{1}{2}\leq x\leq 1.0513$. ב. חישוב עוצמת המבחן: 0.668.
ג. i. אפשר לומר ללא חישוב נוסף שהעוצמה תגדל.

10) א. $c=\{|x-5|\leq a\}$. ב. $c=\{4.75\leq x\leq 5.25\}$.

11) כלל ההכרעה הוא נדחה את השערת האפס אם: $\bar{D}\leq 9.26$.