מתמטיקה לפיננסים

פרק 2 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות **1-5** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

1) $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=e^x$

4) $f(x)=\ln x$ **5)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

6) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

7) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

8) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

10) חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$ ב. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

11) נתון כי f גזירה בנקודה x_0. הוכיחו כי:

א. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

12) נתון כי f גזירה וזוגית.
הוכיחו כי f' אי זוגית.

13) נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל x,y ב-$[a,b]$:
$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.
הוכיחו כי f גזירה ב-$[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

14) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ x^3 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

15) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

16) הוכיחו או הפריכו :
א. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.
ב. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.
ג. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.
ד. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

17) הוכיחו או הפריכו :
א. אם f גזירה, אז $f'(x)=\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$.
ב. אם הגבול $\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

18) הוכיחו או הפריכו :
א. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.
ב. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$

2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$

3) $f'(x)=e^x$

4) $f(x)=\frac{1}{x}$

5) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

6) 44!

7) 2

8) 4

9) א. רציפה לכל x. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

10) א. $\frac{1}{4}$ ב. e

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה. $f'=0$

14) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים $f'(0)=0$.

15) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים $f'(1)=0$.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).
השתמשו בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\geq 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$, על מנת להדגים שתי שיטות אלה.
בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת מהשיטות.

בשאלות **2-7** בדקו גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.
בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות:

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\geq 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\geq 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\geq 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\geq 0 \end{cases}$

6) $f(x)=2+4|x-1|$

7) $f(x)=3x^2+x|x|+1$

8) בדקו האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

9) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\geq -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- a שנמצא בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

10) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases} \ln^3 x & 0<x\leq e \\ ax+b & x>e \end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

11) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר : $f\left(x\right)=\begin{cases} e^x & 0<x\le 1 \\ ax+b & x>1 \end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל : $[4.1]=4$, $[-4.1]=-5$.

12) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases} 2x+8 & x\ge 2 \\ 3x^2 & x<2 \end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases} 2x-4 & x> 2 \\ 3x^2 & x<2 \end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases} 2x-5 & x> 2 \\ 3x^2 & x<2 \end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases} 2x+8 & x\ge 2 \\ 3x^2 & x<2 \end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0 \\ 2x+2 & x\ge 0 \end{cases}$

6) $f'(x)=-4\ (x<1)\quad , \quad f'(x)=4\ (x>1)$

7) $f'(x)=4x\ (x<0)\quad , \quad f'(x)=8x\ (x\ge 0)$

8) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

9) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

10) $a=3/e \quad b=-2$ $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e \\ \dfrac{3}{e} & x\ge e \end{cases}$

11) $a=e \quad b=0$ $f'(x)=\begin{cases} e^x & 0<x<1 \\ e & x\ge 1 \end{cases}$

12) $f'(x)=\begin{cases} 0 & x\notin \mathbb{Z} \\ undefined & x\in \mathbb{Z} \end{cases}$