# מתמטיקה לכלכלנים א

## פרק 4 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

### תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה ..... 1
2. נגזרות חד-צדדיות ..... 4

# הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

**שימו לב**

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

## שאלות*

בשאלות **1-5** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

**1)** $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=e^x$

**4)** $f(x)=\ln x$ **5)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

**6)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

**7)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

**8)** חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

**9)** נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו ?

**10)** חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$ ב. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

**11)** נתון כי $f$ גזירה בנקודה $x_0$. הוכיחו כי:

א. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**12)** נתון כי $f$ גזירה וזוגית.
הוכיחו כי $f'$ אי זוגית.

**13)** נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל $x,y$ ב-$[a,b]$ :
$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.
הוכיחו כי $f$ גזירה ב-$[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

**14)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ x^3 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

**15)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

**16)** הוכיחו או הפריכו :

א. אם $h$ גזירה ב-$x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב-$x_0$,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $h$ אינה גזירה ב-$x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב-$x_0$,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

ג. אם $h$ אינה גזירה ב-$x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב-$x_0$,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

ד. אם $h$ גזירה ב-$x_0$ ו- $g$ אינה גזירה ב-$x_0$,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-$x_0$.

**17)** הוכיחו או הפריכו :

א. אם $f$ גזירה, אז $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז $f$ גזירה.

**18)** הוכיחו או הפריכו :

א. אם $f$ גזירה ב-$(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$.

ב. אם $f$ גזירה ב-$(a,b)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$

2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$

3) $f'(x)=e^x$

4) $f(x)=\frac{1}{x}$

5) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

6) $44!$

7) 2

8) 4

9) א. רציפה לכל $x$. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

10) א. $\frac{1}{4}$ ב. $e$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה. $f'=0$

14) הפונקציה גזירה רק ב-$x=0$, ומתקיים $f'(0)=0$.

15) הפונקציה גזירה רק ב-$x=1$, ומתקיים $f'(1)=0$.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# נגזרות חד-צדדיות

## שאלות

**1)** תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2+8x & x\geq 2\\ x^3+12 & x<2\end{cases}$, על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת מהשיטות.

בשאלות **2-7** בדקו גזירות הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.

בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות:

**2)** $f(x)=\begin{cases}x^2-4x & x\geq 2\\ x^3-14 & x<2\end{cases}$

**3)** $f(x)=\begin{cases}x^2-5x & x\geq 2\\ x^3-14 & x<2\end{cases}$

**4)** $f(x)=\begin{cases}x^2+8x & x\geq 2\\ x^3+12 & x<2\end{cases}$

**5)** $f(x)=\begin{cases}\ln(1+2x) & -0.5<x<0\\ x^2+2x & x\geq 0\end{cases}$

**6)** $f(x)=2+4|x-1|$

**7)** $f(x)=3x^2+x|x|+1$

**8)** בדקו האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

**9)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x+1} & x\geq -1\\ \frac{1}{x}+a & x<-1\end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע $a$ הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה-$a$ שנמצא בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

**10)** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים $a$ ו-$b$ הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & 0<x\leq e\\ ax+b & x>e\end{cases}$.

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

---

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**11)** מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים $a$ ו- $b$ הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}e^x & 0<x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$.

עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

**תזכורת (הערך השלם)**

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי $x$ את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- $x$ (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1]=-5$ , $[4.1]=4$.

**12)** נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.

חשבו את $f'(x)$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

**1)** $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\geq 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

**2)** $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

**3)** $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

**4)** $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\geq 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

**5)** $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\geq 0\end{cases}$

**6)** $f'(x)=4\ (x>1)\quad,\quad f'(x)=-4\ (x<1)$

**7)** $f'(x)=8x\ (x\geq 0)\quad,\quad f'(x)=4x\ (x<0)$

**8)** לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

**9)** א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

**10)** $a=3/e\quad b=-2$

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \dfrac{3}{e} & x\geq e\end{cases}$$

**11)** $a=e\quad b=0$

$$f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\geq 1\end{cases}$$

**12)**

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ undefined & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$


כתב ופתר – גיא סלומון ©