מתמטיקה א

פרק 3 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה 1

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות **1-5** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

1) $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=e^x$

4) $f(x)=\ln x$ **5)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

6) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

7) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

8) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

9) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו ?

10) חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$ ב. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

11) נתון כי f גזירה בנקודה x_0. הוכיחו כי:

א. $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתון כי f גזירה וזוגית.
הוכיחו כי f' אי זוגית.

13) נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל x,y ב-$[a,b]$:
$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.
הוכיחו כי f גזירה ב-$[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

14) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ x^3 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

15) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

16) הוכיחו או הפריכו :

א. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ב. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ג. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

ד. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0,
אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

17) הוכיחו או הפריכו :

א. אם f גזירה, אז $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

18) הוכיחו או הפריכו :

א. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$.

ב. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$

2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$

3) $f'(x)=e^x$

4) $f(x)=\frac{1}{x}$

5) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

6) $44!$

7) 2

8) 4

9) א. רציפה לכל x. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

10) א. $\frac{1}{4}$ ב. e

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה. $f'=0$

14) הפונקציה גזירה רק ב-$x=0$, ומתקיים $f'(0)=0$.

15) הפונקציה גזירה רק ב-$x=1$, ומתקיים $f'(1)=0$.

16) שאלת הוכחה.

17) שאלת הוכחה.

18) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©