# מתמטיקה לתלמידי גאוגרפיה ופיתוח סביבתי 1

## פרק 14 - הבינום של ניוטון

### תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

# הבינום של ניוטון:

## סיכום כללי:

### מושג העצרת:

מסמנים: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot .....\cdot n$ כאשר $n$ מספר טבעי.
מגדירים: $0!=1$.

### המקדם הבינומי:

הביטוי $\binom{n}{k}$ נקרא המקדם הבינומי ומוגדר ע"י: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ לכל $n,k$ טבעיים כאשר $0\le k\le n$.

### הבינום של ניוטון:

נוסחת הבינום של ניוטון ניתנת לכתיבה באופן הבא: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

לכל $n$ טבעי.

ניתן לחשב את האיבר העומד במקום ה- $k$ ע"י: $T_k=\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^{k-1}$.

### משולש פסקל:

משולש מספרים שבו כל מספר בשורה מסוימת שווה לסכום המספרים שבשורה שמעליו באופן המתואר:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\iddots & & & & \vdots & & & & & & \ddots
\end{array}$$

## שאלות:

**1)** חשב, ללא מחשבון:

א. $\frac{4!\cdot 7!}{0!\cdot 10!}$.

ב. $\frac{14!\cdot 20!}{10!\cdot 17!}$.

**2)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $(n-2)!\left(n^2-n\right)=n!$

ב. $(n-1)!n^2+n!=(n+1)!$

ג. $\frac{1}{(n-1)!}=\frac{(n+2)^2}{(n+2)!}+\frac{n^2-2}{(n+1)!}$

**3)** חשב:

א. $\binom{5}{3}$ ב. $\binom{4}{1}$ ג. $\binom{10}{0}$ ד. $\binom{14}{11}$

**4)** הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$.

ב. $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$.

ג. $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.

**5)** הוכח באינדוקציה שלכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים: $\binom{1}{0}+\binom{2}{1}+\binom{3}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{2}$.

**6)** רשום את פיתוח הבינום בכל אחד מהסעיפים הבאים:

א. $(a+b)^4$ ב. $(x+2)^5$ ג. $(x-4)^3$

**7)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח $\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$ לכל $0\le k\le n$ , $k,n\in\mathbb{N}$.

ב. נסח והוכח (באינדוקציה) את נוסחת הבינום.

**8)** הוכח שלכל $n\ge 1$ טבעי מתקיים:

א. $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

ב. $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$.

ג. $\binom{n}{0}+3\binom{n}{1}+9\binom{n}{2}-\ldots+3^n\binom{n}{n}=4^n$.

**9)** מצא את האיבר הרביעי בפיתוח הבינום $\left(\frac{1}{2a}+2a^2\right)^{10}$.

**10)** בפיתוח של $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt{a}\right)^{12}$, ישנו איבר שאחד מגורמיו הוא $a^7$.
מצא את מקום האיבר ואת ערכו.

**11)** מצא, בפיתוח של $\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{x}\right)^{10}$, איבר שאינו מכיל את $x$, וחשב את ערכו.

**12)** ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא, בפיתוח של $\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{a}+\frac{b}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18}$, את המקדם של $\frac{1}{x}$.

ב. חשב את סכום כל המקדמים בפיתוח, אם $a=b=1$.

**13)** המקדם של האיבר השלישי בפיתוח הבינום $(a+b)^n$, הוא 15.
מצא את $n$.

## תשובות סופיות:

**1)** א. $\frac{1}{30}$ ב. $\frac{1001}{285}$.

**2)** הוכחה.

**3)** א. 10 ב. 4 ג. 1 ד. 364.

**4)** הוכחה.

**5)** הוכחה.

**6)** א. $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

ב. $(x+2)^5 = x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$.

ג. $(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.

**7)** הוכחה.

**8)** הוכחה.

**9)** $T_4 = \frac{15}{2a}$.

**10)** $T_7 = 924a^7$.

**11)** $T_9 = 45$.

**12)** א. $\frac{18564 \cdot b^{12}}{a^6}$ ב. $2^{18}$.

**13)** $n = 6$.