מתמטיקה לתוכנית פכ"מ

פרק 24 - האינטגרל המסוים, סכומי רימן

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים 1
2. אי שוויונים עם אינטגרלים 3
3. סכומי רימן 4

האינטגרל המסוים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

2) $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

3) $\int_0^1 xe^{-x}dx$

4) $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

5) $\int_0^4 f\left(x\right)dx$ כאשר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$

6) $\int_{-1}^4 \sqrt{4+\left|x-1\right|}dx$

7) נתונה פונקציה רציפה f. הוכיחו:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^a f\left(x\right)dx=2\int_0^a f\left(x\right)dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^a f\left(x\right)dx=0$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) -6

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\frac{17}{12}$

6) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

7) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אי שוויונים עם אינטגרלים

הוכיחו את אי-השוויונים הבאים:

1) $\frac{2}{41} \le \int_{-1}^{3} \frac{dx}{1+x^4} \le 4$

2) $6 \le \int_{-4}^{2} \sqrt{1+x^2}\,dx \le 6\sqrt{17}$

3) $2 \le \int_{0}^{2} e^{x^2}\,dx \le 2e^4$

4) $\frac{1}{2}e^{-10} \le \int_{0}^{10} \frac{e^{-x}}{x+10}\,dx \le 1$

5) $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \le \int_{3}^{4} \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

6) $\frac{2}{9} \le \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^3} \le \frac{2}{7}$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

סכומי רימן

חשבו את הגבולות בשאלות **1-5**:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

חשבו את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן).

תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

6) $\int_0^1 xdx$ **7)** $\int_0^1 x^2dx$ **8)** $\int_0^1 x^3dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $\ln 2$

3) $\frac{\pi}{4}$

4) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

5) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

6) $\frac{1}{2}$

7) $\frac{1}{3}$

8) $\frac{1}{4}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©