# מכינת מתמטיקה HTWK גרמניה

## פרק 41 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים


1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א ..... 1
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים ..... 7
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות ..... 10
4. משפטי האינטגרביליות ..... 13

# האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

**1)** $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

**2)** $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

**3)** $\int_0^1 xe^{-x}dx$

**4)** $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

**5)** $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

**6)** $\int_0^\pi \cos^2 10x dx$

**7)** $\int_0^4 f(x)dx$, כאשר $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

**8)** $\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|}dx$

**9)** $\int_0^2 \max\left\{x,x^2\right\}dx$

**10)** הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

**11)** הוכיחו שלכל פונקציה רציפה $f$:

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

**12)** תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

**13)** ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

**14)** חשבו: $\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

**15)** חשבו: $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

**16)** נתונה פונקציה רציפה $f$. הוכיחו:

א. אם $f$ זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם $f$ אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

**17)** $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

**18)** $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל $x$, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

**20)** חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx \quad (n\in\mathbb{N})$

**21)** (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

**22)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**24)** חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

**25)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$ והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$.

חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

**26)** הוכיחו:

אם $f$ פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם $T$ המחזור של $f$

אז לכל מספר ממשי $a$ מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

**27)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f$ ו- $g$ פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt = 0$ וגם $\int_a^b g(t)dt = 0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

ב. אם $f$ זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-6$

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) $0$

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) $0$

18) $2\arctan 4$

19) $0$

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. $0$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**26)** שאלת הוכחה.

**27)** שאלת הוכחה.

# מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

## שאלות

1) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
ונניח כי $m\le f(x)\le M$ לכל $x$ בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

2) $\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$

3) $6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}\,dx\le 6\sqrt{17}$

4) $2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$

5) $\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

7) $\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$

8) $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$

9) $-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)|\le\int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**13)** תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**14)** תהי $g$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt=0$.
הוכיחו כי לכל $x$ בקטע $(a,b)$, מתקיים $g(x)=0$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx>1$.
הוכיחו שקיים $x_0$ בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0)>\frac{1}{b-a}$.

**16)** יהי $n$ מספר טבעי, ותהי $f$ פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)\le\int_1^n f(x)dx\le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** הוכיחו שאם הפונקציה $f$ רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע $(a,b)$

וגם $f'(x)\le M$ לכל $x$ בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M(b-a)^2}{2}$.

**19)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי $f$ עולה ו- $g$ אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


כתב ופתר – גיא סלומון ©

# האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

**7)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$

**8)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+\ldots+n=0.5n(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

**9)** $\int_0^1 x\,dx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin x\,dx$

**13)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

**14)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},\ldots,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.


כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) $-1$

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) $2$

13) $21$

14) $0.5$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפטי האינטגרביליות

## שאלות

**1)** בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

**3)** לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית $f$, בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה $f$, החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$, שאינה אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\frac{1}{2},\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il