

# יסודות המתמטיקה

פרק 16 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א..... 1
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים..... 7
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות..... 10

## האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

**(10) הוכיחו כי :**

$$\text{א. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

**(11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה  $f$  :**

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

**(12) תהי  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$  .**

$$\text{פתרו את המשוואה } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

**(13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של  $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$  .**

$$\text{(14) חשבו : } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$\text{(15) חשבו : } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

**(16) נתונה פונקציה רציפה  $f$  . הוכיחו :**

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל  $x$ , ונתון כי  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

$$\text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ג. } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

$$\text{א. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ בעזרת ההצבה } t = \frac{1}{x}.$$

$$\text{ב. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ישירות.}$$

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. בעזרת ההצבה } t = \tan x \text{ חשבו את האינטגרל } \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{ב. חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(24) חשבו את ערך האינטגרל  $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$

(25) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = a$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{3}$  עם הכיוון

החיובי של ציר  $x$  והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = b$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{4}$  עם הכיוון החיובי של ציר  $x$ .

חשבו את ערך האינטגרל  $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$

(26) הוכיחו:

אם  $f$  פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם  $T$  המחזור של  $f$

אז לכל מספר ממשי  $a$  מתקיים  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , ואם  $\int_a^b f(t) dt = 0$  וגם

$\int_a^b g(t) dt = 0$ , אז  $\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$

ב. אם  $f$  זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$  אי-זוגית.

## תשובות סופיות

(1)  $-6$

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $x = e^2$

(13)  $0$

(14)  $\frac{\pi}{4}$

(15)  $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17)  $0$

(18)  $2 \arctan 4$

(19)  $0$

(20) א, ב, ג.  $\frac{\pi}{4}$

(21) א.  $0$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$  ב.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24)  $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25)  $1 - \sqrt{3}$

**(26)** שאלת הוכחה.

**(27)** שאלת הוכחה.

## מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

### שאלות

- (1) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 2-10:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

(12) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$  לכל  $x \in [0, 1]$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

(13) תהי  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x) > 0$  לכל  $x \in [0, a]$ . הוכיחו כי  $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$ . תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי  $g$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b |g(t)| dt = 0$ . הוכיחו כי לכל  $x$  בקטע  $(a, b)$ , מתקיים  $g(x) = 0$ .

(15) תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(x) dx > 1$ . הוכיחו שקיים  $x_0$  בקטע  $[a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$ .

(16) יהי  $n$  מספר טבעי, ותהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע  $[1, n]$ .

הוכיחו כי  $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$ .

(17) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$ .

(18) הוכיחו שאם הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , גזירה בקטע  $(a, b)$

וגם  $f'(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע זה, וכן  $f(a) = 0$ , אז  $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$ .

(19) יהיו  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי  $f$  עולה ו- $g$  אי-שלילית.

הוכיחו שקיים  $c \in [a, b]$  כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$(8) \text{ חשבו: } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)$$

\* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\
 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\
 \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx.$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

$$P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

**תשובות סופיות**

**(1)**  $\frac{1}{5}$

**(2)**  $1 - \cos 1$

**(3)**  $\ln 2$

**(4)**  $\frac{\pi}{4}$

**(5)**  $\ln(1 + \sqrt{2})$

**(6)**  $\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3}$

**(7)**  $\ln 2$

**(8)**  $-1$

**(9)**  $\frac{1}{2}$

**(10)**  $\frac{1}{3}$

**(11)**  $\frac{1}{4}$

**(12)**  $2$

**(13)**  $21$

**(14)**  $0.5$