

# מתמטיקה מורחב א

פרק 22 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א..... 1
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים..... 7
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות..... 10
4. משפטי האינטגרביליות..... 13
5. אינטגרביליות לפי דארבו..... 14

## האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4 + |x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

10) הוכיחו כי :

$$\text{א. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה  $f$  :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

12) תהי  $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ .

$$\text{פתרו את המשוואה } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של  $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$

$$\text{14) חשבו: } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$\text{15) חשבו: } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

16) נתונה פונקציה רציפה  $f$ . הוכיחו :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל  $x$ , ונתון כי  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

חשבו את האינטגרל

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx \quad \text{ב.}$$

$$(n \in \mathbb{N}) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad \text{ג.}$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ , בעזרת ההצבה  $t = \frac{1}{x}$ .

ב. חשבו את האינטגרל  $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

א. בעזרת ההצבה  $t = \tan x$  חשבו את האינטגרל  $\int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$ .

ב. חשבו את ערך האינטגרל  $\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$ .

$$(24) \text{ חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$$

(25) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = a$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{3}$  עם הכיוון

החיובי של ציר  $x$  והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = b$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{4}$  עם הכיוון החיובי של ציר  $x$ .

$$\text{חשבו את ערך האינטגרל } \int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$$

(26) הוכיחו:

אם  $f$  פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם  $T$  המחזור של  $f$

$$\text{אז לכל מספר ממשי } a \text{ מתקיים } \int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , ואם  $\int_a^b f(t) dt = 0$  וגם

$$\int_a^b g(t) dt = 0, \text{ אז } \int_a^b f(t) g(t) dt = 0$$

ב. אם  $f$  זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

$$\text{אז הפונקציה } g(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ אי-זוגית.}$$

### תשובות סופיות

(1)  $-6$

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $x = e^2$

(13)  $0$

(14)  $\frac{\pi}{4}$

(15)  $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17)  $0$

(18)  $2 \arctan 4$

(19)  $0$

(20) א, ב, ג.  $\frac{\pi}{4}$

(21) א.  $0$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$  ב.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24)  $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25)  $1 - \sqrt{3}$

**(26)** שאלת הוכחה.

**(27)** שאלת הוכחה.

## מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

### שאלות

- (1) תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 10-2:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

**(11)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

**(12)** תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$  לכל  $x \in [0, 1]$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

**(13)** תהי  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x) > 0$  לכל  $x \in [0, a]$ .

$$\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$$

הוכיחו כי

תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**(14)** תהי  $g$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b |g(t)| dt = 0$ .

הוכיחו כי לכל  $x$  בקטע  $(a, b)$ , מתקיים  $g(x) = 0$ .

**(15)** תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(x) dx > 1$ .

הוכיחו שקיים  $x_0$  בקטע  $[a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$ .

**(16)** יהי  $n$  מספר טבעי, ותהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע  $[1, n]$ .

הוכיחו כי  $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$

**(17)** חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$

**(18)** הוכיחו שאם הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , גזירה בקטע  $(a, b)$

$$\text{וגם } f'(x) \leq M \text{ לכל } x \text{ בקטע זה, וכן } f(a) = 0, \text{ אז } \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$$

**(19)** יהיו  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי  $f$  עולה ו- $g$  אי-שלילית.

$$\text{הוכיחו שקיים } c \in [a, b], \text{ כך ש-} \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$$

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right) \quad \text{חשבו:} \quad (8)$$

\* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = 0.5n(n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

$$1 - \cos 1 \quad (2)$$

$$\ln 2 \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad (5)$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad (6)$$

$$\ln 2 \quad (7)$$

$$-1 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\frac{1}{3} \quad (10)$$

$$\frac{1}{4} \quad (11)$$

$$2 \quad (12)$$

$$21 \quad (13)$$

$$0.5 \quad (14)$$

## משפטי האינטגרביליות

### שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ :

$$[a, b] = [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$[a, b] = [-4, 14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

$$[a, b] = [0, 9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים:

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע  $[a, b]$ .  
 ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.  
 ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע  $[-1, 1]$ , שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית  $f$ , בקטע  $[a, b]$ , שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.  
 ב. קיימת פונקציה  $f$ , החסומה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$ , שאינה אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{4) נתונה הפונקציה}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ ?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## אינטגרביליות לפי דארבו

### שאלות

- (1) נתונה  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי  $f(x) = x$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (2) נתונה  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי  $f(x) = x^2$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

$$(3) \text{ נתונה הפונקציה הבאה } f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

- (4) נתונה הפונקציה  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  בקטע  $[0,1]$ .
- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה  $f$ , כך ש-  $|f| - 1$  אינטגרביליות, אך  $f$  לא אינטגרבילית.

- (5) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $L(P, f) = U(P, f)$ . הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

- (6) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה. נניח שקיימת חלוקה  $P_n$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$ .
- א. הוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א.  $f(x) = x$ , בקטע  $[0,1]$ .

ב.  $f(x) = x^2$ , בקטע  $[0,2]$ .

(8) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$  אינטגרבילית בקטע  $[1,2]$  בעזרת קריטריון רימן.

### תשובות סופיות

$$\int_0^1 f dx = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \quad \int_0^1 f = \int_0^1 f = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\int_0^2 f dx = \frac{8}{3} \quad \text{ב.} \quad \int_0^2 f = \int_0^2 f = \frac{8}{3} \quad \text{א.} \quad (2)$$

(3) שאלת הוכחה.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad (4)$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.