

# מתמטיקה לכלכלנים ב'

פרק 22 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א..... 1
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים..... 7
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות..... 10
4. משפטי האינטגרביליות..... 13
5. אינטגרביליות לפי דארבו..... 14
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית..... 16

## האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

### שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8)$$

$$\int_0^2 \max\{x, x^2\} dx \quad (9)$$

**(10) הוכיחו כי :**

$$\text{א. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

**(11) הוכיחו שלכל פונקציה רציפה  $f$  :**

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

**(12) תהי  $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$  .**

$$\text{פתרו את המשוואה } f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

**(13) ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של  $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt$  .**

$$\text{(14) חשבו : } \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx$$

$$\text{(15) חשבו : } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

**(16) נתונה פונקציה רציפה  $f$  . הוכיחו :**

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית, אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 17-18 :

$$\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx \quad (17)$$

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (18)$$

(19) נתון כי  $f(x)$  פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל  $x$ , ונתון כי  $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ .

$$\text{חשבו את האינטגרל } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln \left( \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \right) dx$$

(20) חשבו את ערך האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\sin x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ב. } \int_0^{\pi/2} \frac{f(\cos x)}{f(\sin x) + f(\cos x)} dx$$

$$\text{ג. } \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \tan^n x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

(21) (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

$$\text{א. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \text{ בעזרת ההצבה } t = \frac{1}{x}.$$

$$\text{ב. חשבו את האינטגרל } \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ ישירות.}$$

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

$$(22) \text{ הוכיחו כי } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(23) ענו על הסעיפים הבאים :

$$\text{א. בעזרת ההצבה } t = \tan x \text{ חשבו את האינטגרל } \int \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{ב. חשבו את ערך האינטגרל } \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx$$

(24) חשבו את ערך האינטגרל  $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \cos^2 x} dx$

(25) תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים בקטע  $[a, b]$ .

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = a$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{3}$  עם הכיוון

החיובי של ציר  $x$  והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  $x = b$  יוצר זווית  $\frac{\pi}{4}$  עם הכיוון החיובי של ציר  $x$ .

חשבו את ערך האינטגרל  $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x} dx$

(26) הוכיחו:

אם  $f$  פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם  $T$  המחזור של  $f$

אז לכל מספר ממשי  $a$  מתקיים  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

(27) הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם  $f$  ו- $g$  פונקציות רציפות ב- $[a, b]$ , ואם  $\int_a^b f(t) dt = 0$  וגם

$\int_a^b g(t) dt = 0$ , אז  $\int_a^b f(t)g(t) dt = 0$

ב. אם  $f$  זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה  $g(x) = \int_0^x f(t) dt$  אי-זוגית.

## תשובות סופיות

(1)  $-6$

(2)  $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3)  $-2e^{-1} + 1$

(4)  $\frac{1}{5}$

(5)  $\arctan 6 - \arctan 3$

(6)  $\frac{\pi}{2}$

(7)  $\frac{17}{12}$

(8)  $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(9)  $\frac{17}{6}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) שאלת הוכחה.

(12)  $x = e^2$

(13)  $0$

(14)  $\frac{\pi}{4}$

(15)  $\frac{\pi^2}{4}$

(16) שאלת הוכחה.

(17)  $0$

(18)  $2 \arctan 4$

(19)  $0$

(20) א, ב, ג.  $\frac{\pi}{4}$

(21) א.  $0$  ב.  $\frac{\pi}{2}$  ג. ראו בסרטון.

(22) שאלת הוכחה.

(23) א.  $\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + c$  ב.  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(24)  $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

(25)  $1 - \sqrt{3}$

**(26)** שאלת הוכחה.

**(27)** שאלת הוכחה.

## מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

### שאלות

- (1) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו כי  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 2-10:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

(12) תהי  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה המקיימת  $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$  לכל  $x \in [0, 1]$ . הוכיחו כי  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [0, 1]$ .

(13) תהי  $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , כך ש- $f''(x) > 0$  לכל  $x \in [0, a]$ . הוכיחו כי  $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$ . תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי  $g$  פונקציה רציפה ב- $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b |g(t)| dt = 0$ . הוכיחו כי לכל  $x$  בקטע  $(a, b)$ , מתקיים  $g(x) = 0$ .

(15) תהי  $f$  פונקציה אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ , המקיימת  $\int_a^b f(x) dx > 1$ . הוכיחו שקיים  $x_0$  בקטע  $[a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$ .

(16) יהי  $n$  מספר טבעי, ותהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע  $[1, n]$ .

הוכיחו כי  $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$ .

(17) חשבו את הגבול  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$ .

(18) הוכיחו שאם הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a, b]$ , גזירה בקטע  $(a, b)$

וגם  $f'(x) \leq M$  לכל  $x$  בקטע זה, וכן  $f(a) = 0$ , אז  $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$ .

(19) יהיו  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי  $f$  עולה ו- $g$  אי-שלילית.

הוכיחו שקיים  $c \in [a, b]$  כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$ .

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-7 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2} \right] \quad (7)$$

$$(8) \text{ חשבו : } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \right)$$

\* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.

חשבו את האינטגרלים בשאלות 9-12 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \quad (12)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (11)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (9)$$

$$(13) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^4 x^2 dx.$$

$$(14) \text{ חשבו לפי ההגדרה של רימן את } \int_1^2 \frac{1}{x} dx.$$

$$P = \left\{ 1 = 2^{\frac{0}{n}}, 2^{\frac{1}{n}}, 2^{\frac{2}{n}}, 2^{\frac{3}{n}}, \dots, 2^{\frac{n}{n}} = 2 \right\} \text{ רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע}$$

**תשובות סופיות**

$$\frac{1}{5} \quad \textbf{(1)}$$

$$1 - \cos 1 \quad \textbf{(2)}$$

$$\ln 2 \quad \textbf{(3)}$$

$$\frac{\pi}{4} \quad \textbf{(4)}$$

$$\ln(1 + \sqrt{2}) \quad \textbf{(5)}$$

$$\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3} \quad \textbf{(6)}$$

$$\ln 2 \quad \textbf{(7)}$$

$$-1 \quad \textbf{(8)}$$

$$\frac{1}{2} \quad \textbf{(9)}$$

$$\frac{1}{3} \quad \textbf{(10)}$$

$$\frac{1}{4} \quad \textbf{(11)}$$

$$2 \quad \textbf{(12)}$$

$$21 \quad \textbf{(13)}$$

$$0.5 \quad \textbf{(14)}$$

## משפטי האינטגרביליות

### שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  :

$$[a, b] = [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$[a, b] = [-4, 14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

$$[a, b] = [0, 9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע  $[a, b]$ .
- ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.
- ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע  $[-1, 1]$ , שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית  $f$ , בקטע  $[a, b]$ , שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- ב. קיימת פונקציה  $f$ , החסומה בקטע  $[a, b]$  וגזירה בקטע  $(a, b)$ , שאינה אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

$$4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע  $[0, 1]$ ?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## אינטגרביליות לפי דארבו

### שאלות

- (1) נתונה  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי  $f(x) = x$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (2) נתונה  $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$  המוגדרת על ידי  $f(x) = x^2$ .
- א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.
- ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

- (3) נתונה הפונקציה הבאה
- $$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 0.5 \\ 2 & x = 0.5 \\ 1 & 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$
- הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

- (4) נתונה הפונקציה
- $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
- בבקטע  $[0,1]$ .
- א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.
- ב. תנו דוגמה לפונקציה  $f$ , כך ש-  $|f|$  ו-  $f^2$  אינטגרביליות, אך  $f$  לא אינטגרבילית.

- (5) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.
- נניח שקיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $L(P, f) = U(P, f)$ .
- הוכיחו ש-  $f$  פונקציה קבועה.

- (6) תהי  $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.
- נניח שקיימת חלוקה  $P_n$  של הקטע  $[a,b]$ , כך ש-  $U(P_n, f) - L(P_n, f) \rightarrow 0$ .
- א. הוכיחו ש-  $f$  אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי  $\lim_{n \rightarrow \infty} U(P_n, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_n, f) = \int_a^b f(x) dx$ .

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א.  $f(x) = x$ , בקטע  $[0, 1]$ .

ב.  $f(x) = x^2$ , בקטע  $[0, 2]$ .

(8) הוכיחו שהפונקציה  $f(x) = \frac{1}{x}$  אינטגרבילית בקטע  $[1, 2]$  בעזרת קריטריון רימן.

### תשובות סופיות

$$(1) \quad \overline{\int_0^1 f} = \underline{\int_0^1 f} = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \int_0^1 f \, dx = \frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

$$(2) \quad \overline{\int_0^2 f} = \underline{\int_0^2 f} = \frac{8}{3} \quad \text{א.} \quad \int_0^2 f \, dx = \frac{8}{3} \quad \text{ב.}$$

(3) שאלת הוכחה.

$$(4) \quad \text{א. שאלת הוכחה.} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(5) שאלת הוכחה.

(6) שאלת הוכחה.

(7) שאלת הוכחה.

(8) שאלת הוכחה.

## אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

### שאלות

1) תהי  $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת על ידי  $f(x) = x^2$ . מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל- $n$  תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר  $n = 6, 8, 10, 20$ .

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:

תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה ויהיו  $P$  ו- $Q$  שתי חלוקות של הקטע, כך ש- $Q$  עידון של  $P$ , אז  $L(Q, f) \geq L(P, f)$ ,  $U(Q, f) \leq U(P, f)$ .  
ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:

$$\text{תהי } f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ פונקציה חסומה, אז } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^{\bar{b}} f(x) dx.$$

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.

כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:

פונקציה חסומה  $f$  היא אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  אם ורק אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיימת חלוקה  $P$  של הקטע  $[a, b]$ , כך ש- $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$ .  
ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:

תהי  $f$  פונקציה חסומה בקטע  $[a, b]$ , ונניח כי  $(P_n)$  היא סדרה של

$$\text{חלוקות של הקטע } [a, b], \text{ כך ש- } U(P_n, f) - L(P_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

הוכיחו ש- $f$  אינטגרבילית.

$$\text{ג. נתון } f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי } f(x) = \begin{cases} x & x = 1/n \\ 0 & x \neq 1/n \end{cases}$$

$$\text{הוכיחו כי } f \text{ אינטגרבילית ומצאו את } \int_0^1 f(x) dx.$$

4) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

$$(5) \quad f_n(x) : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מוגדרת על ידי: } f_n(x) = \begin{cases} \frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$$

הוכיחו כי

$$(6) \quad \text{תהי פונקציה } f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ כך ש-} f(x) = x \text{ לכל } x \text{ רציונלי,}$$

$$\text{ו-} f(x) = 0 \text{ לכל } x \text{ אי-רציונלי.}$$

העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של  $f$ , והראו כי  $f$  אינה אינטגרבילית.

$$(7) \quad \text{תהי } f : [0,1] \rightarrow [0,1], \text{ מוגדרת באופן הבא:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{אם } x = \frac{p}{q} \neq 1, \text{ כאשר } p, q \in \mathbb{N}, \text{ ול-} p, q \text{ אין גורמים משותפים} \\ 0 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי או } x = 0 \text{ או } x = 1 \end{cases}$$

$$A_N = \left\{ x \in (0,1) \mid x = \frac{p}{q} \right\} : N \in \mathbb{N} \text{ לכל } N, \text{ מוגדרת באופן הבא, לכל } N \in \mathbb{N}$$

כאשר  $p, q \in \mathbb{N}, q \leq N$  ול- $p, q$  אין גורמים משותפים.

הראו שהקבוצה  $A_N$  סופית.

ב. ל- $N \in \mathbb{N}$  ו- $\varepsilon > 0$  נתונים, הראו כי קיימים קטעים

$$[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots, [x_{2m-1}, x_{2m}] \text{ כך ש:}$$

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < 1$$

$$A_N \subseteq (x_1, x_2) \cup (x_3, x_4) \cup \dots \cup (x_{2m-1}, x_{2m})$$

$$\text{ו-} |x_1 - x_2| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_{2m-1} - x_{2m}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ג. הראו ש- $f$  אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות,  $g$  ו- $h$  ב- $[0,1]$ ,

כך שהרכבה  $g \circ h$  אינה אינטגרבילית.

$$(8) \quad \text{תהי } f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ אינטגרבילית וכן } [c,d] \subseteq [a,b].$$

הראו ש- $f$  אינטגרבילית ב- $[c,d]$ .

9 ענו על הסעיפים הבאים :

א. תהי  $f$  חסומה ב- $[c, d]$ , ונתון :

$$M = \sup \{ f(x) \mid x \in [c, d] \}, \quad M' = \sup \{ |f(x)| \mid x \in [c, d] \}$$

$$m = \inf \{ f(x) \mid x \in [c, d] \}, \quad m' = \inf \{ |f(x)| \mid x \in [c, d] \}$$

הוכיחו כי  $M' - m' \leq M - m$ .

ב. תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית.

הוכיחו כי  $|f|$  ו- $f^2$  אינטגרביליות.

10 תהינה  $f$  ו- $g$  שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

א. הוכיחו כי אם  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

ב. הוכיחו כי  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

ג. הוכיחו כי אם  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x \in [a, b]$ ,

$$\text{אז } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

$$\text{היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-} \frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}$$

11 תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  (כלומר,  $f(x) \geq 0$ ).

א. הוכיחו כי אם  $f$  רציפה וכן  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , אז  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [a, b]$ .

ב. הביאו דוגמה לפונקציה  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , כאשר  $\int_a^b f(x) dx = 0$ ,

אבל קיים  $x_0 \in [a, b]$ , עבורו  $f(x_0) > 0$ .

הערה:  $f$  לא תהיה רציפה.

12 תהי  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

נניח שלכל  $c \in (0, 1)$ , הפונקציה  $f$  אינטגרבילית ב- $[c, 1]$ .

א. הוכיחו כי  $f$  אינטגרבילית ב- $[0, 1]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \in (0, 1] \end{cases}$$

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי

אינטגרבילית ב- $[0, 1]$ .

**(13)** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה  $fg$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , עבור פונקציה אינטגרבילית

$$\text{כלשהי } g, \text{ מתקיים } \int_a^b (fg)(x) dx = 0.$$

הוכיחו כי  $f(x) \equiv 0$  (כלומר,  $f(x) = 0$  לכל  $x \in [a, b]$ ).

**(14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו  $x, y \geq 0$ .

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + y^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{x, y\}.$$

ב. תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  רציפה.

$$\text{הוכיחו כי } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b (f(x))^n dx \right) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

**(15)** [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ .

$$\text{הוכיחו כי } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{רמז: } \sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2 \geq 0 \text{ לכל } t \in \mathbb{R}.$$

ב. תהיינה  $f, g$  שתי פונקציות אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

$$\text{הוכיחו כי } \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b (f(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b (g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{רמז: } \int_a^b [tf(x) + g(x)]^2 dx \geq 0 \text{ לכל } t \in \mathbb{R}.$$

**(16)** תהי  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של  $f$  במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.

**17) סעיף א'**

$$1. \text{ הוכיחו כי } b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + \dots + b^{n-2} + a^{n-1})$$

כאשר  $n \in \mathbb{Z}^+$  וכן  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$2. \text{ הוכיחו כי } k^n < \frac{(k+1)^{n+1} - k^{n+1}}{n+1} < (k+1)^n \text{ כאשר } k, n \in \mathbb{Z}^+.$$

$$3. \text{ הוכיחו כי } \sum_{k=1}^{m-1} k^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < \sum_{k=1}^m k^n$$

$$\text{כלומר, } 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n < \frac{m^{n+1}}{n+1} < 1^n + 2^n + \dots + (m-1)^n + m^n$$

**סעיף ב'**

תהי  $f(x) = x^n$  מוגדרת בתחום  $[0, 1]$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי  $f$  אינטגרבילית ב- $[0, 1]$ , וחשבו  $\int_0^1 f(x) dx$ .

רמז: חלקו את הקטע  $[0, 1]$  ל- $m$  קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.



**18)** תהי  $f(x) = \cos x$  מוגדרת ב- $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , כאשר  $n \in \mathbb{N}$ .

השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש- $f$  אינטגרבילית

ב- $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , וחשבו את  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx$ .

רמז 1: חלקו את  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  ל- $n$  קטעים שווים, והניחו כי  $n \rightarrow \infty$ .

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר  $k \in \mathbb{Z}^+$  ו- $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\sin \frac{\theta}{2} \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{(2k+1)\theta}{2} - \sin \frac{(2k-1)\theta}{2} \right]$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \cos k\theta = \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{(2n+1)\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

**19)** חשבו את  $\int_1^2 f(x) dx$ , בעזרת החלוקה  $P_n = \left\{ \overset{=1}{x_0}, x_1, \dots, \overset{=2}{x_n} \right\}$

כאשר  $x_i = 2^{\frac{i}{n}}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) וגם:

$$P_4 = \left\{ 1, 2^{\frac{1}{4}}, 2^{\frac{2}{4}}, 2^{\frac{3}{4}}, 2 \right\} \quad \text{א. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

(20) תהיינה  $f, g$  שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע  $[a, b]$ . הוכיחו:

א. אם  $f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

ב. אם  $m \leq f(x) \leq M$  לכל  $x \in [a, b]$ , אז  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

(21) נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי  $\sqrt{f}$  אף היא אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

(22) נתונה הפונקציה  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:

א. אם  $f$  אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

אז  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

ב. אם  $f$  רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

ג. אם  $f$  אינטגרבילית, אז כך גם  $f^2$ .

ד. אם  $|f|$  אינטגרבילית, אז כך גם  $f$ .

(23) חשבו את  $\int_{0.25}^{4.3} \lfloor x \rfloor dx$ , כאשר  $\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$  (פונקציית הערך השלם).

(24) הוכיחו כי אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$  ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

אז  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$  וכן  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$  וכן  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ .

רמז: הניחו תחילה כי  $\alpha \geq 0$ , והיעזרו בפונקציה  $-f$ , ל- $\alpha < 0$ .

(25) הוכיחו כי אם  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ , אז כך גם  $f + g$ ,

ובנוסף מתקיים  $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ .

רמז: הוכיחו כי  $\int_a^b (f + g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$  וכן  $\int_a^b (f + g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g$ .

(26) נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית וכן שקיים  $c > 0$ , כך ש- $|f(x)| \geq c$  לכל

$x \in [a, b]$ . [לחלופין:  $f$  אינטגרבילית ואינה אפס;  $\frac{1}{f}$  חסומה]

הוכיחו כי גם  $g = \frac{1}{f}$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$ .

**(27)** נניח כי  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

א. הוכיחו כי גם  $f \cdot g$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

ב. הוכיחו כי אם  $|g(x)| \geq c > 0$  לכל  $x \in [a, b]$ ,

אז גם  $\frac{f}{g}$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ .

**(28)** הניחו כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  וכן ש- $a < c < b$ , והוכיחו כי:

א. אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$ , אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, c]$  ו- $[c, b]$ .

ב. אם  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, c]$  ו- $[c, b]$ , אז היא אינטגרבילית גם ב- $[a, b]$ .

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

**(29)** נניח כי  $f, g$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

נגדיר  $\varphi = \max\{f, g\}$  וכן  $\psi = \min\{f, g\}$ .

הוכיחו כי גם  $\varphi, \psi$  אינטגרביליות ב- $[a, b]$ .

רמז:  $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}[a + b + |a - b|]$ ,  $\min\{a, b\} = ?$

**(30)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  של  $[a, b]$  וכן  $\varepsilon > 0$ ,

נגדיר שתי תתי-קבוצות,  $A_\varepsilon(P)$  ו- $B_\varepsilon(P)$  של  $\{1, \dots, n\}$ , באופן הבא:

$i \in A_\varepsilon(P)$  אם  $M_i - m_i < \varepsilon$  ו- $i \in B_\varepsilon(P)$  אם  $M_i - m_i \geq \varepsilon$ .

כמו כן, נגדיר  $s_\varepsilon(P) = \sum_{i \in B_\varepsilon(P)} \Delta x_i$ .

הוכיחו כי פונקציה חסומה  $f$  אינטגרבילית ב- $[a, b]$  אם ורק אם

לכל  $\varepsilon > 0$  ולכל  $\tau > 0$  קיים  $\delta > 0$ , כך שלכל  $P$  כנ"ל  $\|P\| < \delta \Rightarrow s_\varepsilon(P) < \tau$ .

**(31)** נניח כי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  חסומה ותהי  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  חלוקה של  $[a, b]$ .

א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  ל- $P$ ,

כך ש- $S(f; P, C) = L(f, P)$ ? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש- $x_{i-1} < c_i < x_i$ .

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי  $f$  רציפה?

**(32)** זכרו כי פונקציה  $f$  על קטע  $I$  תיקרא קמורה, אם לכל  $a, b \in I$ , ולכל  $t \in [0, 1]$ , מתקיים

$$f(t \cdot a + (1-t) \cdot b) \leq t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$$


א. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  קמורה.

הוכיחו כי לכל  $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$  המקיימים  $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ , מתקיים אי-השוויון

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(a_i) \quad [\text{רמז: אינדוקציה על } n]$$

ב. (אי-שוויון יַנְסֶן)

תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  קמורה ורציפה, ותהי  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה.

$$\text{הוכיחו כי } f\left(\int_0^1 g(x) dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x)) dx$$

**(33)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ותהי  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

א. הוכיחו כי  $f$  אי-זוגית אם ורק אם  $F$  זוגית.

ב. הוכיחו כי  $f$  זוגית אם ורק אם  $F$  אי-זוגית.

**(34)** תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה ותהי  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ .

א. הוכיחו כי אם  $F$  מחזורית, אז גם  $f$  מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה  $f$  מחזורית אבל  $F$  לא-מחזורית.

**(35)** תהי  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  אינטגרבילית.

$$\text{הוכיחו שקיים } c \in [a, b] \text{ ש-} \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

**(36)** תהי  $A$  קבוצת כל הפונקציות  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , שהן אינטגרביליות בכל  $[a, b]$ ,

ומקיימות את השוויון הבא לכל  $x \in \mathbb{R}$  :  $\int_0^x f(t) dt = f(x) - 1$ .

- א. מצאו דוגמה לפונקציה ב- $A$ .
- ב. הוכיחו כי אם  $f \in A$ , אז  $f$  גזירה ב- $\mathbb{R}$ .  
(רמז: תחילה הראו ש- $f$  רציפה).
- ג. מצאו את כל הפונקציות ב- $A$ .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)