

מתמטיקה א

פרק 18 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

תוכן העניינים

1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א.....1
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים.....3
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות.....6
4. משפטי האינטגרביליות.....8

האינטגרל המסוים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות 1-9:

$$\int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3)$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx \quad (5)$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר } \int_0^4 f(x) dx \quad (6)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (7)$$

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (9)$$

(10) נתונה פונקציה רציפה f . הוכיחו:

א. אם f זוגית, אזי $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

ב. אם f אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

(11) $\int_{-1}^1 (x^3 + x^5) \cos x dx$

(12) $\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx$

תשובות סופיות

(1) -6

(2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

(3) $-2e^{-1} + 1$

(4) $\frac{1}{5}$

(5) $\arctan 6 - \arctan 3$

(6) $\frac{17}{12}$

(7) $\frac{2}{3}(-16 + 6^{1.5} + 7^{1.5})$

(8) $\frac{\pi^2}{4}$

(9) $\frac{\pi}{4}$

(10) שאלת הוכחה.

(11) 0

(12) $2 \arctan 4$

מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

שאלות

- (1) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית, ונניח כי $m \leq f(x) \leq M$ לכל x בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות 2-10:

$$\frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (2)$$

$$6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (3)$$

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}e^{-10} \leq \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx \leq 1 \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}} \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}} \quad (6)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

$$\frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (9)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (10)$$

(11) תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית. בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

הוכיחו כי

(12) תהי $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \leq \int_0^x f(t) dt$ לכל $x \in [0, 1]$. הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0, 1]$.

(13) תהי $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, כך ש- $f''(x) > 0$ לכל $x \in [0, a]$. הוכיחו כי $\int_0^a f(x) dx > af\left(\frac{a}{2}\right)$. תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

(14) תהי g פונקציה רציפה ב- $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)| dt = 0$. הוכיחו כי לכל x בקטע (a, b) , מתקיים $g(x) = 0$.

(15) תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a, b]$, המקיימת $\int_a^b f(x) dx > 1$. הוכיחו שקיים x_0 בקטע $[a, b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

(16) יהי n מספר טבעי, ותהי f פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1, n]$.

הוכיחו כי $f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x) dx \leq f(2) + f(3) + \dots + f(n)$.

(17) חשבו את הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$.

(18) הוכיחו שאם הפונקציה f רציפה בקטע $[a, b]$, גזירה בקטע (a, b)

וגם $f'(x) \leq M$ לכל x בקטע זה, וכן $f(a) = 0$, אז $\int_a^b f(x) dx \leq \frac{M(b-a)^2}{2}$.

(19) יהיו $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי f עולה ו- g אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c \in [a, b]$ כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות 1-6:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + \dots + n^4}{n^5} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות 7-10 על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad (10)$$

$$\int_0^1 x^3 dx \quad (9)$$

$$\int_0^1 x^2 dx \quad (8)$$

$$\int_0^1 x dx \quad (7)$$

(11) חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2 dx$.

תשובות סופיות

(1) $\frac{1}{5}$

(2) $1 - \cos 1$

(3) $\ln 2$

(4) $\frac{\pi}{4}$

(5) $\ln(1 + \sqrt{2})$

(6) $\frac{2^{1.5}}{1.5} - \frac{2}{3}$

(7) $\frac{1}{2}$

(8) $\frac{1}{3}$

(9) $\frac{1}{4}$

(10) 2

(11) 21

משפטי האינטגרביליות

שאלות

1) בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a, b]$:

$$[a, b] = [0, 2] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$[a, b] = [-4, 14] \quad f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{ב.}$$

$$[a, b] = [0, 9] \quad f(x) = \begin{cases} 4x & x \neq 1 \\ -41 & x = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

2) ענו על הסעיפים הבאים :

- א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a, b]$.
- ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.
- ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1, 1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

3) לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

- א. קיימת פונקציה אינטגרבילית f , בקטע $[a, b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.
- ב. קיימת פונקציה f , החסומה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) , שאינה אינטגרבילית ב- $[a, b]$.

$$4) \quad \text{נתונה הפונקציה} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{4} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \\ 2 & x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, 1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il