# חדוא 2 ומשוואות דיפרנציאליות רגילות

## פרק 27 - האינטגרל המסוים, אינטגרביליות לפי רימן ולפי דארבו

### תוכן העניינים


1. האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו״א ..... 1
2. מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים ..... 7
3. האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות ..... 10
4. משפטי האינטגרביליות ..... 13
5. אינטגרביליות לפי דארבו ..... 14
6. אינטגרביליות לפי דארבו - תרגול נוסף באנגלית ..... 16

# האינטגרל המסוים, הנוסחה היסודית של החדו"א

## שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-9**:

**1)** $\int_1^4 \left(x^2-4x+1\right)dx$

**2)** $\int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5}dx$

**3)** $\int_0^1 xe^{-x}dx$

**4)** $\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}dx$

**5)** $\int_1^4 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$

**6)** $\int_0^{\pi} \cos^2 10x dx$

**7)** $\int_0^4 f\left(x\right)dx$, כאשר $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x} & 0\le x<1\\ \frac{1}{x^2} & x\ge 1\end{cases}$.

**8)** $\int_{-1}^4 \sqrt{4+\left|x-1\right|}dx$

**9)** $\int_0^2 \max\left\{x,x^2\right\}dx$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**10)** הוכיחו כי:

א. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

ב. $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

**11)** הוכיחו שלכל פונקציה רציפה $f$:

א. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$

ב. $\int_0^{\pi} x\, f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

**12)** תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$.

פתרו את המשוואה $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2$.

**13)** ללא חישוב האינטגרלים, חשבו את הערך של $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}dt+\int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

**14)** חשבו: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$.

**15)** חשבו: $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

**16)** נתונה פונקציה רציפה $f$. הוכיחו:

א. אם $f$ זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

ב. אם $f$ אי-זוגית, אזי $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **17-18**:

**17)** $\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^5\right)\cos x dx$

**18)** $\int_{-4}^{4}\frac{\sin x+1}{x^2+1}dx$

**19)** נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה ואי-זוגית לכל $x$, ונתון כי $|f(x)|\le\frac{1}{2}$.

חשבו את האינטגרל $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-f(x)}{1+f(x)}\right)dx$.

**20)** חשבו את ערך האינטגרלים הבאים:

א. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\sin x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ב. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{f(\cos x)}{f(\sin x)+f(\cos x)}dx$

ג. $\left(n\in\mathbb{N}\right)\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\tan^n x}dx$

**21)** (אזהרה לגבי שיטת ההצבה)

א. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$, בעזרת ההצבה $t=\frac{1}{x}$.

ב. חשבו את האינטגרל $\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx$ ישירות.

ג. בסעיפים א' ו-ב' קיבלנו תשובות שונות. הסבירו את הסתירה.

**22)** הוכיחו כי $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx=2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**23)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. בעזרת ההצבה $t=\tan x$ חשבו את האינטגרל $\int\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

ב. חשבו את ערך האינטגרל $\int_{0}^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}dx$.

**24)** חשבו את ערך האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\cos^2 x}dx$.

**25)** תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בקטע $[a,b]$.

נניח כי הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=a$ יוצר זווית $\frac{\pi}{3}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$ והישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=b$ יוצר זווית $\frac{\pi}{4}$ עם הכיוון החיובי של ציר $x$.

חשבו את ערך האינטגרל $\int_{e^a}^{e^b} \frac{f''(\ln x)}{x}dx$.

**26)** הוכיחו:

אם $f$ פונקציה רציפה ומחזורית על כל הישר ואם $T$ המחזור של $f$

אז לכל מספר ממשי $a$ מתקיים $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

**27)** הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f$ ו- $g$ פונקציות רציפות ב-$[a,b]$, ואם $\int_a^b f(t)dt = 0$ וגם $\int_a^b g(t)dt = 0$, אז $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$.

ב. אם $f$ זוגית ואינטגרבילית בכל קטע,

אז הפונקציה $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ אי-זוגית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $-6$

2) $\ln\left(\frac{15}{8}\right)$

3) $-2e^{-1}+1$

4) $\frac{1}{5}$

5) $\arctan 6-\arctan 3$

6) $\frac{\pi}{2}$

7) $\frac{17}{12}$

8) $\frac{2}{3}\left(-16+6^{1.5}+7^{1.5}\right)$

9) $\frac{17}{6}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) $x=e^2$

13) $0$

14) $\frac{\pi}{4}$

15) $\frac{\pi^2}{4}$

16) שאלת הוכחה.

17) $0$

18) $2\arctan 4$

19) $0$

20) א, ב, ג. $\frac{\pi}{4}$

21) א. $0$ ב. $\frac{\pi}{2}$ ג. ראו בסרטון.

22) שאלת הוכחה.

23) א. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+c$ ב. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

24) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

25) $1-\sqrt{3}$


כתב ופתר – גיא סלומון ©

**26)** שאלת הוכחה.

**27)** שאלת הוכחה.

# מונוטוניות האינטגרל, אי שוויונות אינטגרליים

## שאלות

**1)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית,
וננית כי $m\le f(x)\le M$ לכל $x$ בקטע $[a,b]$.
הוכיחו כי $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

הוכיחו את אי-השוויונים בשאלות **2-10**:

**2)** $\frac{2}{41}\le\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^4}\le 4$

**3)** $6\le\int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}dx\le 6\sqrt{17}$

**4)** $2\le\int_{0}^{2}e^{x^2}dx\le 2e^4$

**5)** $\frac{1}{2}e^{-10}\le\int_{0}^{10}\frac{e^{-x}}{x+10}dx\le 1$

**6)** $\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 4}}\le\int_{3}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}}\le\frac{1}{\sqrt[3]{\ln 3}}$

**7)** $\frac{\pi}{14}\le\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+4\sin^2 x}dx\le\frac{\pi}{6}$

**8)** $\frac{2}{9}\le\int_{-1}^{1}\frac{dx}{8+x^3}\le\frac{2}{7}$

**9)** $-\frac{1}{2}\le\int_{0}^{1}x\cdot\sin\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)dx\le\frac{1}{2}$

**10)** $\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right)dx \le \frac{\pi^4}{6}$

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.
בהסתמך על המשפט, שטוען כי גם $|f|$ אינטגרבילית בקטע,
הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה המקיימת $|f(x)| \le \int_0^x f(t)dt$ לכל $x\in[0,1]$.
הוכיחו כי $f(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$.

**13)** תהי $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f''(x)>0$ לכל $x\in[0,a]$.
הוכיחו כי $\int_0^a f(x)dx > af(\frac{a}{2})$.
תנו משמעות גיאומטרית לתוצאה שהתקבלה.

**14)** תהי $g$ פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b |g(t)|dt = 0$.
הוכיחו כי לכל $x$ בקטע $(a,b)$, מתקיים $g(x)=0$.

**15)** תהי $f$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, המקיימת $\int_a^b f(x)dx > 1$.
הוכיחו שקיים $x_0$ בקטע $[a,b]$, עבורו $f(x_0) > \frac{1}{b-a}$.

**16)** יהי $n$ מספר טבעי, ותהי $f$ פונקציה מונוטונית עולה ואינטגרבילית בקטע $[1,n]$.
הוכיחו כי $f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1) \le \int_1^n f(x)dx \le f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$.

**17)** חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln k$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**18)** הוכיחו שאם הפונקציה $f$ רציפה בקטע $[a,b]$, גזירה בקטע $(a,b)$

וגם $f'(x)\le M$ לכל $x$ בקטע זה, וכן $f(a)=0$, אז $\int_a^b f(x)dx \le \frac{M(b-a)^2}{2}$.

**19)** יהיו $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות אינטגרביליות.

נניח כי $f$ עולה ו- $g$ אי-שלילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש- $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^c g(x)dx + f(a)\int_c^b g(x)dx$.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# האינטגרל המסוים לפי ההגדרה, אינטגרביליות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-7**:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}$

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}+\sin\frac{2}{n}+\ldots+\sin\frac{n}{n}}{n}$

**3)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right\}$

**4)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right\}$

**5)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$

**6)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\ldots+\sqrt{2n}}{n^{3/2}}\right\}$

**7)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{n}{(n+n)^2}\right]$

**8)** חשבו: $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$.

* תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד אינטגרלים לא-אמיתיים.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **9-12** על פי ההגדרה (של רימן):

תוכלו להיעזר בזהויות הבאות:

$$1+2+3+...+n=0.5n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n}{2}\alpha\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

**9)** $\int_0^1 xdx$ **10)** $\int_0^1 x^2dx$ **11)** $\int_0^1 x^3dx$ **12)** $\int_0^\pi \sin xdx$

**13)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^4 x^2dx$.

**14)** חשבו לפי ההגדרה של רימן את $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$.

רמז: השתמשו בחלוקה הבאה של הקטע $P=\left\{1=2^{\frac{0}{n}},2^{\frac{1}{n}},2^{\frac{2}{n}},2^{\frac{3}{n}},...,2^{\frac{n}{n}}=2\right\}$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

## תשובות סופיות

1) $\frac{1}{5}$

2) $1-\cos 1$

3) $\ln 2$

4) $\frac{\pi}{4}$

5) $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

6) $\frac{2^{1.5}}{1.5}-\frac{2}{3}$

7) $\ln 2$

8) $-1$

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{3}$

11) $\frac{1}{4}$

12) $2$

13) $21$

14) $0.5$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# משפטי האינטגרביליות

## שאלות

**1)** בדקו עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$:

א. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,2]$

ב. $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ $\quad [a,b]=[-4,14]$

ג. $f(x)=\begin{cases}4x & x\neq 1\\ -41 & x=1\end{cases}$ $\quad [a,b]=[0,9]$

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית בשום קטע $[a,b]$.

ב. מצאו דוגמה לפונקציה חסומה בקטע מסוים שאינה אינטגרבילית בו.

ג. מצאו דוגמה לפונקציה מונוטונית למקוטעין בקטע $[-1,1]$, שאינה אינטגרבילית בקטע.

**3)** לגבי כל אחת מהטענות, קבעו אם היא נכונה או לא נכונה. נמקו.

א. קיימת פונקציה אינטגרבילית $f$, בקטע $[a,b]$, שאין לה פונקציה קדומה בקטע זה.

ב. קיימת פונקציה $f$, החסומה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$, שאינה אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q},\ x\neq\dfrac{1}{2},\ x\neq\dfrac{1}{4}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\\ 2 & x=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרביליות לפי דארבו

## שאלות

**1)** נתונה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ , המוגדרת על ידי $f(x)=x$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**2)** נתונה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^2$ .

א. מצאו את האינטגרל העליון והתחתון של הפונקציה בקטע.

ב. הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו בקטע ומצאו את האינטגרל המסוים שלה בקטע.

**3)** נתונה הפונקציה הבאה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<0.5\\ 2 & x=0.5\\ 1 & 0.5<x\le 1\end{cases}$ .

הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית לפי ההגדרה של דארבו.

**4)** נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בקטע $[0,1]$ .

א. בדקו, לפי ההגדרה של דארבו, האם הפונקציה אינטגרבילית בקטע.

ב. תנו דוגמה לפונקציה $f$ , כך ש- $|f|$ ו- $f^2$ אינטגרביליות, אך $f$ לא אינטגרבילית.

**5)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $L(P,f)=U(P,f)$ .

הוכיחו ש- $f$ פונקציה קבועה.

**6)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שקיימת חלוקה $P_n$ של הקטע $[a,b]$, כך ש- $U(P_n,f)-L(P_n,f)\to 0$ .

א. הוכיחו ש- $f$ אינטגרבילית בקטע.

ב. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}U(P_n,f)=\lim_{n\to\infty}L(P_n,f)=\int_a^b f(x)dx$ .


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**7)** בכל אחד מהסעיפים הבאים הוכיחו שהפונקציה אינטגרבילית בעזרת קריטריון רימן. בנוסף, חשבו את האינטגרל המסוים של הפונקציה בקטע.

א. $f(x)=x$ , בקטע $[0,1]$.

ב. $f(x)=x^2$ , בקטע $[0,2]$.

**8)** הוכיחו שהפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ אינטגרבילית בקטע $[1,2]$ בעזרת קריטריון רימן.

## תשובות סופיות

**1)** א. $\overline{\int_0^1} f=\underline{\int_0^1} f=\frac{1}{2}$ ב. $\int_0^1 f\,dx=\frac{1}{2}$

**2)** א. $\overline{\int_0^2} f=\underline{\int_0^2} f=\frac{8}{3}$ ב. $\int_0^2 f\,dx=\frac{8}{3}$

**3)** שאלת הוכחה.

**4)** א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$

**5)** שאלת הוכחה.

**6)** שאלת הוכחה.

**7)** שאלת הוכחה.

**8)** שאלת הוכחה.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

# אינטגרביליות לפי דארבו – תרגול נוסף באנגלית

## שאלות

**1)** תהי $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=x^2$.
מצאו סכום דארבו עליון ותחתון של הפונקציה המתאים לחלוקת הקטע ל-$n$ תת-קטעים בעלי אורך שווה, כאשר $n=6,8,10,20$.

**2)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הגדירו את המושג עידון של חלוקה.

ב. הוכיחו את המשפט הבא:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ויהיו $P$ ו-$Q$ שתי חלוקות של הקטע, כך ש-$Q$ עידון של $P$, אז $L(Q,f)\geq L(Q,P), U(Q,f)\leq U(Q,P)$.

ג. הוכיחו את המסקנה הבאה מהמשפט:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, אז $\underline{\int_a^b} f(x)dx\leq \bar{\int_a^b} f(x)dx$.

**3)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את קריטריון רימן לאינטגרביליות.
כלומר, הוכיחו את המשפט הבא:
פונקציה חסומה $f$ היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה $P$ של הקטע $[a,b]$, כך ש-$U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$.

ב. הוכיחו את המסקנה מהמשפט לעיל:
תהי $f$ פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$, ונניח כי $(P_n)$ היא סדרה של חלוקות של הקטע $[a,b]$, כך ש-$U(P_n,f)-L(P_n,f)\underset{n\to\infty}{\to}0$.
הוכיחו ש-$f$ אינטגרבילית.

ג. נתון $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases}x & x=1/n\\ 0 & x\neq 1/n\end{cases}$.
הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ומצאו את $\int_0^1 f(x)dx$.

**4)** הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. פונקציה רציפה בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.

ב. פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית בקטע.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**5)** סדרת פונקציות $f_n(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי: $f_n(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{1+x} & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$.

הוכיחו כי $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\frac{1}{2}$.

**6)** תהי פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, כך ש- $f(x)=x$ לכל $x$ רציונלי,
ו- $f(x)=0$ לכל $x$ אי-רציונלי.
העריכו את האינטגרל העליון והתחתון של $f$, והראו כי $f$ אינה אינטגרבילית.

**7)** תהי $f:[0,1]\to[0,1]$, מוגדרת באופן הבא:

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{אם } x=\frac{p}{q}\neq 1 \text{, כאשר } p,q\in\mathbb{N} \text{, ול-} p,q \text{ אין גורמים משותפים}\\ 0 & x \text{ אם אי-רציונלי או } x=0 \text{ או } x=1\end{cases}$

א. תהי $A_N$ מוגדרת באופן הבא, לכל $N\in\mathbb{N}$: $A_N=\left\{x\in(0,1)\mid x=\frac{p}{q}\right\}$,
כאשר $p,q\in\mathbb{N}$, $q\le N$ ול-$p,q$ אין גורמים משותפים.
הראו שהקבוצה $A_N$ סופית.

ב. ל-$N\in\mathbb{N}$ ו-$\varepsilon>0$ נתונים, הראו כי קיימים קטעים
$[x_1,x_2],[x_3,x_4],...,[x_{2m-1},x_{2m}]$, כך ש:
$0<x_1<x_2<x_3<x_4<...<x_{2m-1}<x_{2m}<1$,
$A_N\subseteq(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)\cup...\cup(x_{2m-1},x_{2m})$,
ו- $|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+...+|x_{2m-1}-x_{2m}|\le\frac{\varepsilon}{2}$.

ג. הראו ש- $f$ אינטגרבילית.

ד. מצאו שתי פונקציות אינטגרביליות, $g$ ו- $h$ ב-$[0,1]$,
כך שההרכבה $g\circ h$ אינה אינטגרבילית.

**8)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן $[c,d]\subseteq[a,b]$.
הראו ש- $f$ אינטגרבילית ב-$[c,d]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**9)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי $f$ חסומה ב-$[c,d]$, ונתון:

$$M=\sup\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad M'=\sup\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$
$$m=\inf\{f(x)\mid x\in[c,d]\},\quad m'=\inf\{|f(x)|\mid x\in[c,d]\}$$

הוכיחו כי $M'-m'\le M-m$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו כי $|f|$ ו-$f^2$ אינטגרביליות.

**10)** תהיינה $f$ ו-$g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

ג. הוכיחו כי אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$,

אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

היעזרו באי-שוויון זה כדי להראות ש-$\frac{\sqrt{3}}{8}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{6}$.

**11)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\ge0}$ (כלומר, $f(x)\ge0$).

א. הוכיחו כי אם $f$ רציפה וכן $\int_a^b f(x)dx=0$, אז $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$.

ב. הביאו דוגמה לפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, כאשר $\int_a^b f(x)dx=0$,

אבל קיים $x_0\in[a,b]$, עבורו $f(x_0)>0$.

הערה: $f$ לא תהיה רציפה.

**12)** תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שלכל $c\in(0,1)$, הפונקציה $f$ אינטגרבילית ב-$[c,1]$.

א. הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

ב. היעזרו בסעיף א, והוכיחו כי $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sin\frac{1}{x} & x\in(0,1]\end{cases}$

אינטגרבילית ב-$[0,1]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**13)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

נניח שכאשר המכפלה $fg$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, עבור פונקציה אינטגרבילית כלשהי $g$, מתקיים $\int_a^b (fg)(x)dx=0$.

הוכיחו כי $f(x)\equiv 0$ (כלומר, $f(x)=0$ לכל $x\in[a,b]$).

**14)** ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $x,y\geq 0$.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(x^n+y^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{x,y\}$.

ב. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ רציפה.

הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b\left(f(x)\right)^n dx\right)=\sup\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$.

**15)** [אי-שוויון קושי-שוורץ]

א. יהיו $x_1,x_2,...x_n,y_1,y_2,...y_n\in\mathbb{R}$.

הוכיחו כי $\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right|\leq\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\sum_{i=1}^n\left(tx_i+y_i\right)^2\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

ב. תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

הוכיחו כי $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\left(\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b\left(g(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

רמז: $\int_a^b\left[tf(x)+g(x)\right]^2dx\geq 0$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

**16)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית.

נשנה את הערכים של $f$ במספר סופי של נקודות.

הוכיחו שהפונקציה שמתקבלת אינטגרבילית.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**17) סעיף א'**

1. הוכיחו כי $b^n-a^n=(b-a)\left(b^{n-1}+b^{n-2}a+b^{n-3}a+\ldots++b^{n-2}+a^{n-1}\right)$, כאשר $n\in\mathbb{Z}^+$ וכן $a,b\in\mathbb{R}$.

2. הוכיחו כי $k^n<\frac{(k+1)^{n+1}-k^{n+1}}{n+1}<(k+1)^n$, כאשר $k,n\in\mathbb{Z}^+$.

3. הוכיחו כי $\sum_{k=1}^{m-1}k^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<\sum_{k=1}^{m}k^n$.

כלומר, $1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n<\frac{m^{n+1}}{n+1}<1^n+2^n+\ldots+(m-1)^n+m^n$.

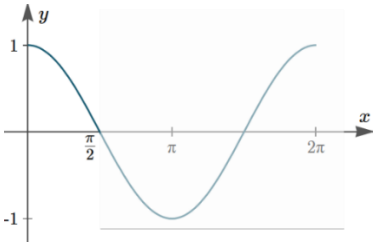
**סעיף ב'**

תהי $f(x)=x^n$ מוגדרת בתחום $[0,1]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.

בעזרת סכומי רימן, הוכיחו כי $f$ אינטגרבילית ב-$[0,1]$, וחשבו $\int_0^1 f(x)dx$.

רמז: חלקו את הקטע $[0,1]$ ל-$m$ קטעים שווים והיעזרו בסעיף א' להערכת הסכומים העליונים והתחתונים.

**18)** תהי $f(x)=\cos x$ מוגדרת ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, כאשר $n\in\mathbb{N}$.




השתמשו בסכומי רימן והוכיחו ש-$f$ אינטגרבילית ב-$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, וחשבו את $\int_0^{\pi/2}f(x)dx$.

רמז 1: חלקו את $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ל-$n$ קטעים שווים, והניחו כי $n\to\infty$.

רמז 2: השתמשו בזהות הטריגונומטרית הבאה, כאשר $k\in\mathbb{Z}^+$ ו-$\theta\in\mathbb{R}$,

$\sin\frac{\theta}{2}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2k+1)\theta}{2}-\sin\frac{(2k-1)\theta}{2}\right]$, כדי להעריך את הסכום:

$\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\frac{1}{2}\left[\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right]$.

**19)** חשבו את $\int_1^2 f(x)dx$, בעזרת החלוקה $P_n=\left\{\overset{=1}{x_0},x_1,\ldots,\overset{=2}{x_n}\right\}$,

כאשר $x_i=2^{\frac{i}{n}}\ (0\le i\le n)$, וגם:

א. $f(x)=\frac{1}{x}$

ב. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $\quad P_4=\left\{1,2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{2}{4}},2^{\frac{3}{4}},2\right\}$


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**20)** תהיינה $f,g$ שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. הוכיחו:

א. אם $f(x)\le g(x)$ לכל $x\in[a,b]$, אז $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$.

ב. אם $m\le f(x)\le M$ לכל $x\in[a,b]$, אז $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

**21)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית אי-שלילית.

הוכיחו כי $\sqrt{f}$ אף היא אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**22)** נתונה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f$ אינטגרבילית, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס,

אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ב. אם $f$ רציפה, אי-שלילית ולא שווה זהותית לאפס, אז $\int_a^b f(x)dx>0$.

ג. אם $f$ אינטגרבילית, אז כך גם $f^2$.

ד. אם $|f|$ אינטגרבילית, אז כך גם $f$.

**23)** חשבו את $\int_{0.25}^{4.3}\lfloor x\rfloor dx$, כאשר $\lfloor x\rfloor=\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\le x\}$

(פונקציית הערך השלם).

**24)** הוכיחו כי אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ו-$\alpha\in\mathbb{R}$,

אז $\alpha f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, וכן $\int_a^b\alpha f(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$.

רמז: הניחו תחילה כי $\alpha\ge0$, והיעזר בפונקציה $-f$, ל-$\alpha<0$.

**25)** הוכיחו כי אם $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$, אז כך גם $f+g$,

ובנוסף מתקיים $\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$.

רמז: הוכיחו כי $\overline{\int_a^b}(f+g)\le\overline{\int_a^b}f+\overline{\int_a^b}g$ וכן $\underline{\int_a^b}(f+g)\ge\underline{\int_a^b}f+\underline{\int_a^b}g$.

**26)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וכן שקיים $c>0$, כך ש-$|f(x)|\ge c$ לכל $x\in[a,b]$. [לחלופין: $f$ אינטגרבילית ואינה אפס; חסומה $\frac{1}{f}$]

הוכיחו כי גם $g=\frac{1}{f}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**27)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

א. הוכיחו כי גם $f\cdot g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

ב. הוכיחו כי אם $|g(x)|\geq c>0$ לכל $x\in[a,b]$,

אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

**28)** הניחו כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ וכן ש-$a<c<b$, והוכיחו כי:

א. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$.

ב. אם $f$ אינטגרבילית ב-$[a,c]$ ו-$[c,b]$, אז היא אינטגרבילית גם ב-$[a,b]$.

ג. באיזה מהמקרים, בסעיפים א' ו-ב', מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$.

**29)** נניח כי $f,g$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

נגדיר $\varphi=\max\{f,g\}$ וכן $\psi=\min\{f,g\}$.

הוכיחו כי גם $\varphi,\psi$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$.

רמז: $\max\{a,b\}=\frac{1}{2}\left[a+b+|a-b|\right]$, $\min\{a,b\}=$?

**30)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

בהינתן החלוקה $P=\{x_0,\ldots,x_n\}$ של $[a,b]$ וכן $\varepsilon>0$,

נגדיר שתי תתי-קבוצות, $A_\varepsilon(P)$ ו-$B_\varepsilon(P)$ של $\{1,\ldots,n\}$, באופן הבא:

$i\in A_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i<\varepsilon$, ו-$i\in B_\varepsilon(P)$ אם $M_i-m_i\geq\varepsilon$.

כמו כן, נגדיר $s_\varepsilon(P)=\sum_{i\in B_\varepsilon(P)}\Delta x_i$.

הוכיחו כי פונקציה חסומה $f$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $\tau>0$ קיים $\delta>0$, כך שלכל $P$ כנ"ל $\|P\|<\delta\ \Rightarrow\ s_\varepsilon(P)<\tau$.

**31)** נניח כי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ חלוקה של $[a,b]$.

א. האם תמיד נוכל לבחור תגיות $C=\{c_1,\ldots,c_n\}$ ל-$P$,

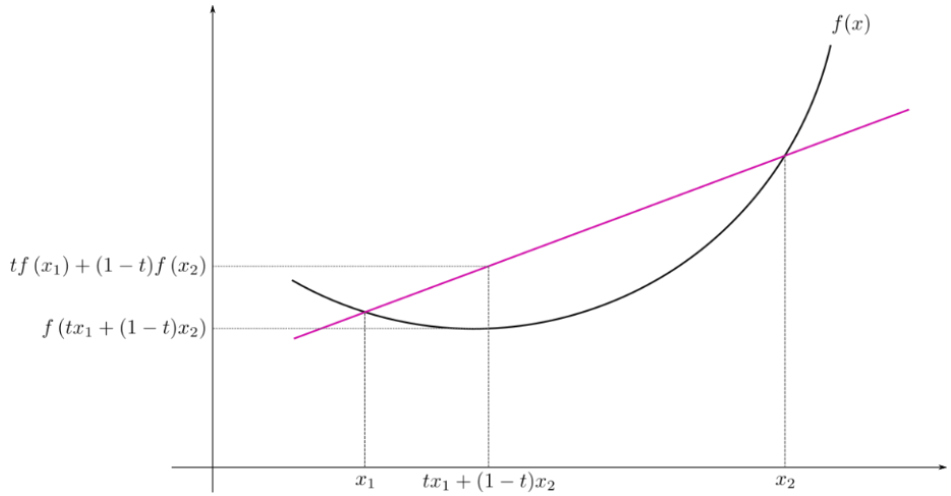
כך ש-$S(f;P,C)=L(f,P)$? נמקו.

הערה: ב"תגיות" הכוונה ש-$x_{i-1}<c_i<x_i$.

ב. האם התשובה תשתנה אם יינתן גם כי $f$ רציפה?


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**32)** זכרו כי פונקציה $f$ על קטע $I$ תיקרא קמורה, אם לכל $a,b\in I$, ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים $f\left(t\cdot a+(1-t)\cdot b\right)\le t\cdot f\left(a\right)+(1-t)\cdot f\left(b\right)$.




א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה.

הוכיחו כי לכל $t_1,\ldots,t_n\in[0,1]$ המקיימים $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, מתקיים אי-השוויון $f\left(\sum_{i=1}^{n}t_i a_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_i f\left(a_i\right)$.

[רמז: אינדוקציה על $n$]

ב. (אי-שוויון יֶנְסֶן)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קמורה ורציפה, ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה.

הוכיחו כי $f\left(\int_0^1 g\left(x\right)dx\right)\le\int_0^1 f\left(g\left(x\right)\right)dx$.

**33)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$.

א. הוכיחו כי $f$ אי-זוגית אם ורק אם $F$ זוגית.

ב. הוכיחו כי $f$ זוגית אם ורק אם $F$ אי-זוגית.

**34)** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ותהי $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$.

א. הוכיחו כי אם $F$ מחזורית, אז גם $f$ מחזורית.

ב. מצאו דוגמה שבה $f$ מחזורית אבל $F$ לא-מחזורית.

**35)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

הוכיחו שקיים $c\in[a,b]$, כך ש-$\int_a^c f\left(x\right)dx=\int_c^b f\left(x\right)dx$.


לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

**36)** תהי $A$ קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ , שהן אינטגרביליות בכל $[a,b]$,

ומקיימות את השוויון הבא לכל $x\in\mathbb{R}$ : $\boxed{\int_0^x f(t)dt = f(x)-1}$ .

א. מצאו דוגמה לפונקציה ב-$A$ .

ב. הוכיחו כי אם $f\in A$ , אז $f$ גזירה ב- $\mathbb{R}$ .
(רמז : תחילה הראו ש- $f$ רציפה).

ג. מצאו את כל הפונקציות $f$ ב-$A$ .

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il