שדות אלקטרומגנטיים

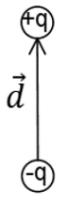
פרק 5 - דיפול חשמלי

תוכן העניינים

1. הכל על דיפול 1

הכל על דיפול:

רקע:



דיפול חשמלי הוא זוג מטענים בעלי מטען זהה וסימון הפוך הנמצאים במרחק d זה מזה.

מומנט הדיפול :

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

כיוונו מהמטען השלילי לחיובי.

הפוטנציאל שיוצר דיפול במרחק גדול $r \gg d$:

$$\varphi = \frac{k(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3} = \frac{k(\vec{p} \cdot \hat{r})}{r^2}$$

השדה של דיפול במרחק גדול:

$$\vec{E} = \frac{k[3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}]}{r^3}$$

מומנט דיפול של מערכת מטענים:

$$p_x = \sum x_i q_i = \int x \, \mathrm{d}q$$

מומנט כוח הפועל על דיפול הנמצא בשדה חשמלי חיצוני:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול בשדה חיצוני:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

כוח הפועל על דיפול הנמצא בשדה חיצוני:

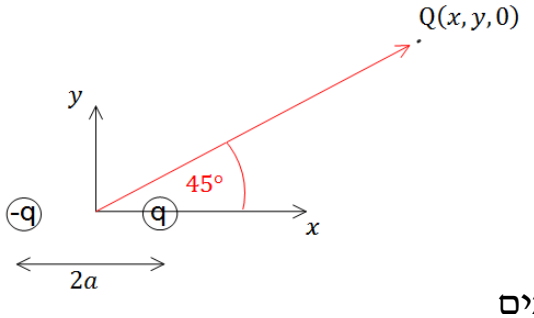
$$\vec{F} = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\right) \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} U$$

השוויון האחרון נכון רק אם השדה משמר (נוצר ממטענים) ומומנט הדיפול אחיד (לא תלוי בקואורדינטות).

שאלות:

1) תרגיל ופיתוח הנוסחה של דיפול מהשדה

שני מטענים בעלי מטען q ו- $-q$ ממוקמים $x=a$ ו- $x=-a$.



א. חשב את הכוח הפועל על מטען שלישי Q הנמצא בנקודה $(x,y,0)$.

ב. הנח שמרחק המטען מהראשית גדול בהרבה מהמרחק בין המטענים והזווית של וקטור מיקום המטען עם ציר ה- x הוא $45°$. השתמש בתשובה של סעיף א' ובקירובים וחשב מה הכוח הפועל על המטען.

ג. חשב את וקטור מומנט הדיפול שיוצרים המטענים.

ד. חשב שוב את הכוח הפועל על המטען, הפעם השתמש בנוסחה של שדה של דיפול והראה כי התשובה זהה לתשובה של סעיף ב'.

2) דיפול בראשית מזיז אלקטרון

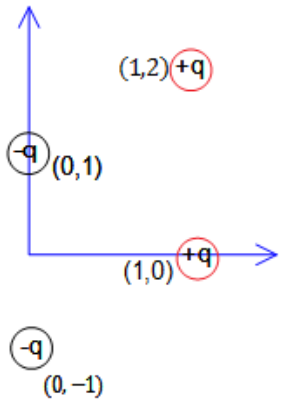
נתון דיפול $\vec{p}=(p,0,0)$ הנמצא בראשית.

א. מצא את הגודל p כך שאלקטרון הממוקם בנקודה $(a,0,0)$ עם מהירות $(v,0,0)$ ייעצר בנקודה $(b,0,0)$.

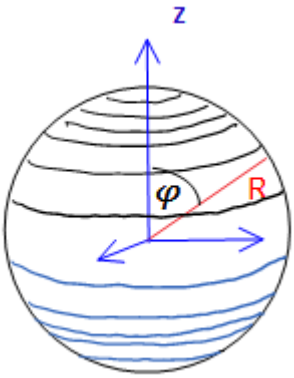
ב. מצא את הגודל p כך שאלקטרון הממוקם בנקודה $\left(a,-\sqrt{2}a,0\right)$ עם מהירות $(0,0,v)$ יבצע תנועה מעגלית.

3) מציאת מומנט דיפול של מערכת

מצא את מומנט הדיפול החשמלי של התפלגות המטענים המתוארת בציור.

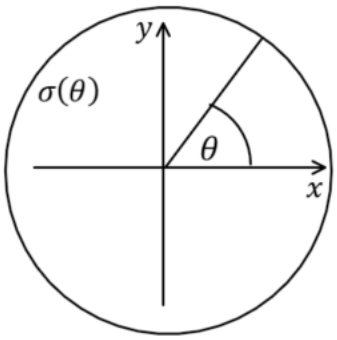


4) מציאת מומנט דיפול של מערכת



(באותו הסרטון כמו השאלה הקודמת)
מצא את מומנט הדיפול של קליפה כדורית הטעונה בצפיפות מטען משטחית לא אחידה $\sigma = \sigma_0 \cos\varphi$
כאשר σ_0 קבוע נתון ו- φ היא הזווית עם ציר ה-z.

5) דיסקה עם התפלגות מטען שתלויה בזווית



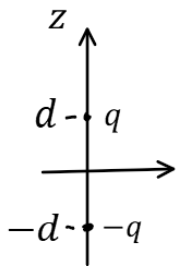
דיסקה מלאה בעלת רדיוס R טעונה בצפיפות מטען ליחידת שטח $\sigma(\theta)$.
מצא את השדה החשמלי במרחק z מעל מרכז הדיסקה בגבול בו $z >> R$:

א. במקרה בו $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin(\theta)$.

ב. במקרה בו $\sigma(\theta) = \sigma_0 \sin(2\theta)$ רק עד הסדר של הדיפול.

6) חישוב שגיאה

מטען q נמצא ב-$(0,0,d)$ ומטען $-q$ נמצא ב-$(0,0,-d)$.



א. חשב את הפוטנציאל המדויק בנקודה כלשהיא על ציר z.

ב. מהו הערך המינימלי של z כך שהקירוב של הפוטנציאל של דיפול לא יסטה יותר מאחוז אחד מהפוטנציאל האמתי?

ג. מהו הערך המינימלי של z כך שהקירוב של השדה של דיפול לא יסטה יותר מאחוז אחד מהשדה האמיתי?

7) מטען נקודתי ודיפול (כולל אנרגיה וכוח)

דיפול חשמלי בעל מומנט דיפול $\vec{p}$ נמצא במיקום $\vec{r}$.
מטען נקודתי q נמצא בראשית. התייחס ל-q, $\vec{p}$ ו- $\vec{r}$ כנתונים.

א. חשב את מומנט הכוח שפועל על הדיפול.

ב. חשב את האנרגיה של הדיפול.

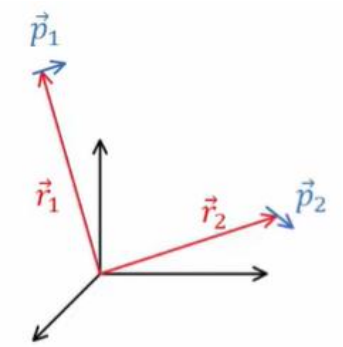
ג. הראה כי הכוח הפועל על הדיפול הוא: $\vec{F} = \frac{k\left(\vec{p}\cdot r^2 - \left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\cdot\vec{r}\right)}{r^5}$

8) אנרגית דיפול-דיפול

דיפול $\vec{p}_1$ ממוקם ב- $\vec{r}_1$ ודיפול $\vec{p}_2$ ממוקם ב- $\vec{r}_2$.

א. הראה שהאנרגיה של $\vec{p}_2$ בשדה של $\vec{p}_1$ היא:

$$U=\frac{k}{\tilde{r}^3}\left[\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2-3\left(\vec{p}_1\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\left(\vec{p}_2\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\right]$$ כאשר $\vec{\tilde{r}}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$, $\tilde{r}=\left|\vec{\tilde{r}}\right|$ ו- $\hat{\tilde{r}}=\frac{\vec{\tilde{r}}}{\tilde{r}}$.



ב. אנרגיה זו היא בעצם אנרגיה של מערכת דיפול-דיפול, הראה שאם היינו מחשבים את האנרגיה של $\vec{p}_1$ בשדה של $\vec{p}_2$ היינו מקבלים תוצאה זהה.

ג. מצא את הכוח הפועל על $\vec{p}_2$ והכוח על $\vec{p}_1$.

ד. מה שווה הכוח על $\vec{p}_2$ במקרה ש- $\vec{p}_2$ מקביל ל- $\vec{p}_1$ ומקביל ל- $\vec{\tilde{r}}$?

ומה הכוח אם $\vec{p}_2$ מקביל ל- $\vec{p}_1$ ומאונך ל- $\vec{\tilde{r}}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}=kq\left[\left(\frac{x-a}{\left((x-a)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\frac{x+a}{\left((x+a)^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{x}+\left(\frac{y}{\left((x-a)^2+y^2\right)}-\frac{y}{\left((x+a)+y^2\right)}\right)\hat{y}\right]$

ב. $\frac{kq}{r^3}\left(a\hat{x}+3a\hat{y}\right)$ ג. $q2a\hat{x}$ ד. שאלת הוכחה.

2) א. $\rho=\frac{mv^2}{2e^k}\left(\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}\right)$ ב. $|e|\frac{K\sqrt{2}p}{3\sqrt{3}a^3}$

3) 0

4) $\left(0,0,\frac{4}{3}\sigma_0R^32\pi\right)$

5) א. $-\frac{k\pi r_0R^3\hat{y}}{3z^3}$ ב. 0

6) א. $\varphi(q)=\frac{kq2d}{z^2-d^2}$ ב. $z_{\min}=10d$ ג. $z_{\min}\approx14.14d$

7) א. $\frac{kq}{r^3}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$ ב. $-\frac{kq}{r^3}\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$ ג. שאלת הוכחה

8) א. שאלת הוכחה ב. שאלת הוכחה

ג. $\vec{F}_1=-\vec{F}_2\ ,\ \vec{F}_2=\frac{3k}{\tilde{r}^4}\left[\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2\cdot\tilde{\hat{r}}+\left(\vec{p}_2\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\cdot\vec{p}_1+\left(\vec{p}_1\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\vec{p}_2-5\left(\vec{p}_1\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\left(\vec{p}_2\cdot\hat{\tilde{r}}\right)\hat{\tilde{r}}\right]$

ד. $\vec{F}_2=-\frac{6K}{\tilde{r}^4}p_1p_2\hat{\tilde{r}}\ :\ \vec{p}_1\parallel\vec{p}_2\parallel\vec{\tilde{r}}\quad,\quad\vec{F}_2=-\frac{3K}{\tilde{r}^4}p_1p_2\hat{\tilde{r}}\ :\ \vec{p}_1\parallel\vec{p}_2\perp\vec{\tilde{r}}$